Abteilung: Angewandte Analysis
Prof. Dr. Werner Balser
Übungsleiter: Jens Dittrich

Übungen zur Analysis I - Blatt 3
Abgabe: 17. Mai, 14:15 Uhr vor der Übung

Name: **Vorname:** **Tutor:**

Aufgabe	1	2	3	4	5	Summe
Soll	4	3	3	4	6	20
Ist						

Bis auf solche Fakten, die aus dem Vorlesungsbetrieb bekannt sind, müssen alle verwendeten Aussagen gut formuliert und bewiesen werden. Der Lösungsweg muss deutlich erkennbar sein.

1. (a) Sei $0 = az^2 + bz + c$ mit $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ und $z \in \mathbb{C}$ eine quadratische Gleichung mit reellen Koeffizienten. Weise nach, dass die bekannte Formel für die Lösungen dieser Gleichung auch im Fall $b^2 - 4ac < 0$ richtig ist, solange wir nur $\sqrt{-1} = \pm i$ setzen.

   (b) Bestimme die komplexen Lösungen der folgenden quadratischen Gleichungen:
$$0 = z^2 - 12z + 52, \qquad 0 = z^2 + 6z + 18.$$

   (c) Seien $n \in \mathbb{N}$ und $p(z) := a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 = \sum_{k=0}^n a_k z^k$ mit $a_k \in \mathbb{R}$ für $k = 0, \ldots, n$, $a_n \neq 0$ und $z \in \mathbb{C}$ ein auf der gesamten komplexen Ebene definiertes Polynom n-ten Grades mit reellen Koeffizienten. Sei weiter $z_0 \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle von p, d.h. $p(z_0) = 0$. Dann ist die konjugiert-komplexe Zahl $\bar{z}_0$ ebenfalls eine Nullstelle von p, also gilt $p(\bar{z}_0) = 0$.

2. (a) Zeige für beliebige reelle Zahlen x_1, x_2, y_1, y_2 die Aussage
$$\begin{aligned}(x_1x_2 + y_1y_2)^2 &= (x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2) - (x_1y_2 - x_2y_1)^2 \\ &\leq (x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2).\end{aligned}$$

   (b) Benutze Teilaufgabe (a), um die Dreiecksungleichung im Komplexen zu beweisen:
$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2| \quad \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}.$$

3. (a) Berechne die Lösungen $z = x + iy \in \mathbb{C}$ der folgenden Gleichungen:
$$(5 + i)z = 4 + 6i, \qquad 5\frac{z+3}{z-3} = 2 - 9i.$$

   (b) Sei $z = x + iy \in \mathbb{C}$. Stelle die folgenden Ausdrücke in Termen von x und y dar:
$$\frac{\mathrm{Re}(iz)}{\mathrm{Im}(\bar{z})}, \qquad \mathrm{Re}((1 - i)\bar{z}) - \mathrm{Im}((1 - i)\bar{z}).$$

Bitte wenden!

4. Beweise die folgenden Formeln mit Hilfe der vollständigen Induktion.

   (a) Für alle ungeraden $n \in \mathbb{N}$ gilt die Identität $i^n = i(-1)^{\frac{n-1}{2}}$.

   (b) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$.

5. (a) Beweise mittels vollständiger Induktion: Für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 10$ gilt $n^3 < 2^n$.

   (b) Bestimme Supremum, Infimum, Maximum und Minimum, falls sie existieren, der Menge

$$M = \left\{ \frac{n^3}{2^n} \,|\, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

   Betrachte dabei die Aussage

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : n^3 < 2^n \varepsilon \, \forall n > N(\varepsilon)$$

   als bereits bewiesen.