Abteilung: Angewandte Analysis
Prof. Dr. Werner Balser
Übungsleiter: Jens Dittrich

Übungen zur Analysis I - Blatt 4

Abgabe: 24. Mai, 14:15 Uhr vor der Übung

Name: **Vorname:** **Tutor:**

Aufgabe	1	2	3	4	5	Summe
Soll	4	6	2	4	4	20
Ist						

Bis auf solche Fakten, die aus dem Vorlesungsbetrieb bekannt sind, müssen alle verwendeten Aussagen gut formuliert und bewiesen werden. Der Lösungsweg muss deutlich erkennbar sein.

1. Beweise die folgenden Gleichungen mit vollständiger Induktion.

   (a)
   $$\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

   (b)
   $$\prod_{k=0}^{n} \left(1 + x^{(2^k)}\right) = \frac{1 - x^{(2^{n+1})}}{1 - x}, \quad \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \forall x \in \mathbb{C} \setminus \{1\}.$$

2. (a) Durch das Rekursionsschema

   $$a_0 := -2, \quad a_1 := 1, \quad a_{n+1} := \frac{1}{2}(a_n + a_{n-1}),\ n \in \mathbb{N}$$

   wird genau eine Folge $\{a_n\}_{n=0,1,2,\ldots} \subset \mathbb{R}$ definiert. Man gebe eine explizite Darstellung für diese Folge an. Hinweis: Man berechne a_n für $n = 2, 3, 4, 5$ und beweise dann die sich ergebende Vermutung.

   (b) Die Folge $\{b_n\}_{n=0,1,2,\ldots} \subset \mathbb{R}$ sei folgendermaßen rekursiv definiert

   $$b_0 := 3, \quad b_{n+1} := \frac{1}{2}\left(b_n + \frac{5}{b_n}\right),\ n \in \mathbb{N}_0.$$

   Zeige $\sqrt{5} < b_{n+1} < b_n \; \forall n \in \mathbb{N}$. Ist $\sqrt{5}$ das Infimum der Menge

   $$M = \{b_n \,:\, n \in \mathbb{N}_0\}?$$

   Hinweis: Betrachte die Differenz $b_n - b_{n+1}$.

Bitte wenden!

3. Zeige die folgenden Aussagen

   (a) Für beliebige Zahlen $z_k \in \mathbb{C}$ für $k = 1, 2$ gilt

   $$|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2\left(|z_1|^2 + |z_2|^2\right).$$

   (b) Zu jedem $z \in \mathbb{C}$ gibt es eine reelle Zahl $r \geq 0$ und eine komplexe Zahl w mit $|w| = 1$, so dass $z = rw$ ist. Bestimme die folgenden Mengen

   $$\begin{aligned} M_1 &:= \{z \in \mathbb{C} \,:\, r \text{ ist eindeutig bestimmt}\}, \\ M_2 &:= \{z \in \mathbb{C} \,:\, w \text{ ist eindeutig bestimmt}\}. \end{aligned}$$

4. Beweise die unten stehenden Aussagen

   (a) Es seien $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$ und $f : \{1, \ldots, m_1\} \to \{1, \ldots, m_2\}$ bijektiv. Dann folgt $m_1 = m_2$.

   (b) Zu $j \in \{1, \ldots m\}$, $m \in \mathbb{N}$ seien A_j Mengen mit $n_j \in \mathbb{N}$ Elementen. Dann hat die Menge $A_1 \times \cdots \times A_m$ genau $n_1 \cdot \cdots \cdot n_m$ Elemente.

5. Beweise die folgenden Aussagen

   (a) Jede nach oben beschränkte Teilmenge der natürlichen Zahlen, ebenso wie jede beschränkte Teilmenge der ganzen Zahlen, ist immer endlich.

   (b) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist $\mathbb{N}^n = \underbrace{\mathbb{N} \times \cdots \times \mathbb{N}}_{n\text{-mal}}$ abzählbar.

   (c) Sei $\mathcal{P}(\mathbb{N}) := \{N \,:\, N \subseteq \mathbb{N}\}$ die Potenzmenge von $\mathbb{N}$. Dann ist $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ überabzählbar.

   (d) Sei $\mathcal{A}(\mathbb{N}) := \{A \,:\, A \subseteq \mathbb{N},\, A \text{ ist höchstens abzählbar}\}$ die Menge aller höchstens abzählbaren Teilmengen von $\mathbb{N}$. Dann ist $\mathcal{A}(\mathbb{N})$ überabzählbar.