Abteilung: Angewandte Analysis
Prof. Dr. Werner Balser
Übungsleiter: Jens Dittrich

Übungen zur Analysis I - Blatt 5

Abgabe: 31. Mai, 14:15 Uhr vor der Übung

Name: **Vorname:** **Tutor:**

Aufgabe	1	2	3	4	5	Summe
Soll	6	4	2	4	4	20
Ist						

Bis auf solche Fakten, die aus dem Vorlesungsbetrieb bekannt sind, müssen alle verwendeten Aussagen gut formuliert und bewiesen werden. Der Lösungsweg muss deutlich erkennbar sein.

1. (a) Zu $n \in \mathbb{N}$ seien $x_0, \ldots, x_n$ reelle Stützstellen und $L_j(x)$ für $j = 0, \ldots, n$ die Lagrangeschen Basispolynome. Sei weiter $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$, dann gilt die Identität
$$\sum_{j=0}^{n} x_j^k L_j(x) = x^k \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$
Gilt diese Identität auch für $k > n$?

   (b) Seien $(x_0, f_0) = (-2, -5)$, $(x_1, f_1) = (-1, 4)$, $(x_2, f_2) = (0, -1)$ und $(x_3, f_3) = (2, 3)$ vier Stützstellen. Berechne die Koeffizienten b_k des Interpolationspolynoms n-ten Grades in Newtonscher Darstellung
$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k \prod_{j=0}^{k-1} (x - x_j)$$
für $n = 0, 1, 2, 3$.

2. Führe eine Polynomdivision durch, d.h. suche die eindeutig bestimmten Polynome q_1 und r, so dass $p = q_1 q + r$ gemäß Aufgabe 3.2.13 gilt.

   (a) $p(x) = (x-1)^3$, $q(x) = x + 1$,

   (b) $p(x) = x^3 + x^2 - x - 1$, $q(x) = x - 1$.

3. Beweise die folgenden Ungleichungen mit Hilfe der Bernoullischen Ungleichung:

   (a) $\forall n \in \mathbb{N} : \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \geq 2$,

   (b) $\forall n \in \mathbb{N} : \frac{n-1}{n} \leq \left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^n$.

Bitte wenden!

4. (a) Berechne die Zahl

$$\left(\begin{array}{c} i \\ 3 \end{array} \right).$$

(b) Seien $k, n \in \mathbb{N}$ mit $k \leq n$. Zeige direkt durch Anwendung der Definition der Binomialkoeffizienten die Abschätzungen

$$\frac{n^k}{k!}\left(1 - \frac{k(k-1)}{n}\right) \leq \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) \leq \frac{n^k}{k!}.$$

(c) Zeige, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ die Gleichung

$$\sum_{k=0}^{n} \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) = 2^n$$

erfüllt ist.

5. (a) Zeige mit Hilfe der Ungleichung des arithmetischen und geometrischen Mittels für $n, p \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2p$, dass

$$\sqrt[n]{n^p} < 1 + \frac{2p}{\sqrt{n}}$$

richtig ist.

(b) Zeige, dass die Folge

$$a_n := \sqrt[n]{x} - 1$$

für alle $x \in \mathbb{R}_+$ eine Nullfolge ist.

(c) Weise nach, dass für beliebiges $x \in \mathbb{R}$ die Folge

$$b_n := \frac{x^n}{n!}$$

eine Nullfolge ist.

(d) Sei $\{c_n\}_{n=1,2,\ldots} \subset \mathbb{R}$ eine Folge mit den Eigenschaften

$$0 \leq c_{n+1} \leq c_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

und

$$\inf\{c_n \,:\, n \in \mathbb{N}\} = 0.$$

Dann ist $\{c_n\}_{n=1,2,\ldots}$ eine Nullfolge.