Abteilung: Angewandte Analysis
Prof. Dr. Werner Balser
Übungsleiter: Jens Dittrich

Übungen zur Analysis I - Blatt 6

Abgabe: 7. Juni, 14:15 Uhr vor der Übung

Name: **Vorname:** **Tutor:**

Aufgabe	1	2	3	4	5	Summe
Soll	6	3	3	4	4	20
Ist						

Bis auf solche Fakten, die aus dem Vorlesungsbetrieb bekannt sind, müssen alle verwendeten Aussagen gut formuliert und bewiesen werden. Der Lösungsweg muss deutlich erkennbar sein.

1. Untersuche die Konvergenz der folgenden Folgen und bestimme gegebenenfalls deren Grenzwert:

   (a) Zu $p \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ und $x \in \mathbb{R}_+$ sei $(a_n)_{n=1,2,\ldots}$ rekursiv definiert durch

   $$a_0 \geq \sqrt[p]{x}, \quad a_{n+1} = \frac{1}{p}\left((p-1)a_n + \frac{x}{a_n^{p-1}}\right) \quad n = 0, 1, \ldots.$$

   (b) Zu $n \in \mathbb{N}$ sei

   $$b_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}.$$

   (c) Zu $n \in \mathbb{N}$ sei

   $$c_n = \frac{2^n + (-3)^n}{(-2)^n + 3^n}.$$

2. Im folgenden bezeichne $\exp(x) = \lim_{n\to\infty}(1 + \frac{x}{n})^n$, $x \in \mathbb{R}$ die Exponentialfunktion und $e = \exp(1)$ die Eulersche Zahl. Zeige:

   (a) $\forall p \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\} \, : \, \exp(p) = e^p$,

   (b) $\forall q \in \mathbb{N} \, : \, \exp(1/q) = \sqrt[q]{e}$,

   (c) $\forall p \in \mathbb{Z}, \forall q \in \mathbb{N} \, : \, \exp(p/q) = \sqrt[q]{e^p}$.

3. Beweise die folgenden Aussagen über die reelle Exponentialfunktion $\exp(x)$ definiert gemäß Aufgabe 2:

   (a) $\forall x \in \mathbb{R} \, \Rightarrow \, \exp(x) \geq 1 + x$,

   (b) $\forall x < 1 \, \Rightarrow \, \exp(x) \leq (1-x)^{-1}$,

   (c) $\forall x, y \in \mathbb{R}$ mit $x < y \Rightarrow \exp(x) < \exp(y)$.

Bitte wenden!

4. (a) Überprüfe das notwendige Konvergenzkriterium für Reihen gemäß Proposition 5.1.6 für folgende Reihen:

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k \text{ für } q \in \mathbb{R}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} k^{-\alpha} \text{ für } \alpha \in \mathbb{R}.$$

   (b) Zeige für die zweite Reihe aus Aufgabe (a) mit $\alpha = 1$, dass sie bestimmt divergiert.

5. (a) Es sei $(x_n)_{n=1,2,\dots}$ eine Folge aus $\mathbb{R}$. Ferner seien $(x_{\varphi^{(k)}(n)})$ Teilfolgen, welche gegen ein ξ_k für $k = 1, \dots, K$ mit $K \in \mathbb{N}$ konvergieren. Weiter gebe es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $k \in \{1, \dots, K\}$ und ein $m \in \mathbb{N}$ mit $x_n = x_{\varphi^{(k)}(m)}$. Zeige: Dann ist die Menge $\{\xi_1, \dots, \xi_K\}$ die Menge aller Häufungspunkte.

   (b) Bestimme die Menge aller Häufungspunkte sowie den Limes superior und den Limes inferior der folgenden Folgen:

$$a_n = (1 + (-1)^n)\,(-1)^{n(n+1)/2}, \qquad b_n = \left(1 + \frac{(-1)^n}{2n}\right)^{3n}.$$