Abteilung: Angewandte Analysis
Prof. Dr. Werner Balser
Übungsleiter: Jens Dittrich

Übungen zur Analysis I - Blatt 7

Abgabe: 14. Juni, 14:15 Uhr vor der Übung

Name: **Vorname:** **Tutor:**

Aufgabe	1	2	3	4	5	Summe
Soll	4	2	4	4	6	20
Ist						

Bis auf solche Fakten, die aus dem Vorlesungsbetrieb bekannt sind, müssen alle verwendeten Aussagen gut formuliert und bewiesen werden. Der Lösungsweg muss deutlich erkennbar sein.

1. Untersuche die folgenden Reihen auf Konvergenz:

   (a) $\sum_{k=1}^{\infty} k^{\alpha} q^k, \quad \alpha \in \mathbb{N}, |q| < 1,$

   (b) $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k^2+(-1)^k}{k^2+2}\right)^{k^3},$

   (c) $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(\log k)^{\alpha}}, \quad \alpha \in \mathbb{R},$

   (d) $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{(k+1)^k}{k^{k+1}}.$

2. Untersuche die folgenden Reihen $\sum_{k=1}^{\infty} a_k, \sum_{k=1}^{\infty} b_k$, welche durch rekursive Folgen definiert werden, auf Konvergenz.

   (a) Die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sei folgendermaßen rekursiv definiert

   $$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \left(\frac{3}{4} + \frac{(-1)^n}{2}\right) a_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

   (b) Die Folge $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sei folgendermaßen rekursiv definiert

   $$b_1 = 1, \quad b_{n+1} = 1 - e^{-b_n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

3. Berechne die Werte der folgenden Reihen:

   (a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)(k+2)},$

   (b) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2+(-1)^k}{3^k},$

   (c) $\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} 2^{-k-j}.$

Bitte wenden!

4. Es sei $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ eine absolut konvergente Reihe. Zeige:

   (a) Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2$ konvergiert.

   (b) Gilt $a_k \neq -1$ für alle $k \in \mathbb{N}$, so ist die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{1+a_k}$ absolut konvergent.

5. Wir definieren die folgenden Funktionen

$$f(x) = \begin{cases} x - [x] & \text{für} \quad x \in [2k, 2k+1) \\ [x] - x + 1 & \text{für} \quad x \in [2k+1, 2k+2) \end{cases} \qquad \text{für ein} \quad k \in \mathbb{Z},$$

und für $n \in \mathbb{N}_0$

$$f_n(x) = 4^{-n} f(4^n x).$$

   (a) Skizziere die Funktionen $f_0, f_1, f_0 + f_1$

   (b) Sei (x_k) eine reellwertige, monotone und beschränkte Folge. Zeige: Dann gilt

$$\lim_{k\to\infty} f_n(x_k) = f_n(\lim_{k\to\infty} x_k)$$

   für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

   (c) Untersuche für festes $x \in \mathbb{R}$ die Konvergenz der Reihe

$$g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x).$$