Abteilung: Angewandte Analysis
Prof. Dr. Werner Balser
Übungsleiter: Jens Dittrich

Übungen zur Analysis I - Blatt 8

Abgabe: 21. Juni, 14:15 Uhr vor der Übung

Name: **Vorname:** **Tutor:**

Aufgabe	1	2	3	4	5	Summe
Soll	2	4	6	4	4	20
Ist						

Bis auf solche Fakten, die aus dem Vorlesungsbetrieb bekannt sind, müssen alle verwendeten Aussagen gut formuliert und bewiesen werden. Der Lösungsweg muss deutlich erkennbar sein.

1. Bestimme die Konvergenzradien der folgenden Reihen:

$$\text{(a)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}, \qquad \text{(b)} \sum_{k=0}^{\infty} k^n z^k, \quad n \in \mathbb{N}.$$

   Für welche $z \in \mathbb{C}$ liegt absolute Konvergenz vor?

2. (a) Untersuche die Konvergenz der Reihen von $\sin(x)$ und $\cos(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

   (b) Zeige, dass für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt: $e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$. Hinweis: Benutze die Potenzreihendarstellung der komplexen Exponentialfunktion.

   (c) Zeige, dass für alle $0 < x \leq 3$ die folgenden Ungleichungen gelten

$$\begin{aligned} x - \frac{x^3}{6} \leq \quad \sin(x) \quad &\leq x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}, \\ 1 - \frac{x^2}{2} \leq \quad \cos(x) \quad &\leq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}. \end{aligned}$$

3. (a) Untersuche die Existenz der folgenden Limites

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n}\right)^k}{k!}, \qquad \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right)^k}{k(k+1)}.$$

   (b) Gib im ersten Fall obere und untere Schranken des Grenzwertes an. Berechne im zweiten Fall den Grenzwert.

Bitte wenden!

4. (a) Es sei $x > 0$. Zeige die folgende Abschätzung

$$\left| e^x - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k!} \right| \leq \frac{x^n}{n!} e^x.$$

Für welches $n \in \mathbb{N}$ kann man garantieren, dass $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!}$ die Eulersche Zahl e auf drei Dezimalstellen genau berechnet?

(b) Für $x < 0$ zeige die Abschätzung

$$\left| e^x - \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{x^k}{k!} \right| \leq \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

für hinreichend großes $n \in \mathbb{N}$. Für welches $n \in \mathbb{N}$ kann man garantieren, dass $\sum_{k=0}^{2n+1} \frac{(-1)^k}{k!}$ die Zahl $1/e$ auf drei Dezimalstellen genau berechnet?

5. Untersuche die gleichmäßige Konvergenz der folgenden Folgen:

(a) Für $n \in \mathbb{N}$ sei

$$g_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k(x),$$

hierbei seien Funktionen f_k in Aufgabe 5 des siebten Übungsblattes definiert.

(b) Es sei für $n \in \mathbb{N}$ und $x \in \mathbb{R}$ die Folge

$$h_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n}$$

definiert.