Abteilung: Angewandte Analysis
Prof. Dr. Werner Balser
Übungsleiter: Jens Dittrich

Übungen zur Analysis I - Blatt 9

Abgabe: 28. Juni, 14:15 Uhr vor der Übung

Name: **Vorname:** **Tutor:**

Aufgabe	1	2	3	4	5	Summe
Soll	6	2	2	5	5	20
Ist						

Bis auf solche Fakten, die aus dem Vorlesungsbetrieb bekannt sind, müssen alle verwendeten Aussagen gut formuliert und bewiesen werden. Der Lösungsweg muss deutlich erkennbar sein.

1. Gib zu jedem $x_0 \in D_i$ und jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta_i = \delta_i(\varepsilon, x_0) > 0$ an, so dass $|f_i(x) - f_i(x_0)| \leq \varepsilon$ für alle $x \in D_i$ mit $|x - x_0| \leq \delta_i(\varepsilon, x_0)$ richtig ist. Hierbei bezeichnet D_i jeweils den Definitionsbereich der Funktionen f_i für $i = 1, 2$.

   (a) $f_1 : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, \quad f_1(x) = \dfrac{1}{x},$ (b) $f_2 : [0, \infty) \to \mathbb{R}, \quad f_2(x) = \sqrt{x}.$

   (c) Untersuche die gleichmäßige Stetigkeit der f_i auf D_i für $i = 1, 2$.

2. Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^4 - 10x^2 + 9}{x^2 - 4x + 3} & \text{falls} \quad x \neq 1 \quad \text{und} \quad x \neq 3 \\ A & \text{falls} \quad x = 1 \\ B & \text{falls} \quad x = 3, \end{cases}$$

   hierbei sind $A, B \in \mathbb{R}$ Konstanten.

   (a) Beweise, auf möglichst kurzem Wege, die Stetigkeit der Funktion f auf $\mathbb{R} \setminus \{1, 3\}$ für beliebige Wahl von $A, B \in \mathbb{R}$.

   (b) Können A und B so gewählt werden, dass f auf ganz $\mathbb{R}$ stetig ist?

3. Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - x}{x^2 - 3x + 2} & \text{falls} \quad x \notin \mathbb{N} \\ \frac{4x - 6}{x + 1} & \text{falls} \quad x \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

   Bestimme alle Stetigkeitsstellen von f. Hinweis: Untersuche die Fälle $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$, $x = 2$ und $x \in \mathbb{N} \setminus \{2\}$.

Bitte wenden!

4. Beweise die folgenden Aussagen

   (a) Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $|\sin(x)| \leq 1$.

   (b) Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

   $$f(x) = \begin{cases} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{für} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{für} \quad x = 0 \end{cases}$$

   ist stetig auf ganz $\mathbb{R}$.

   (c) Die Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

   $$g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$$

   mit den Funktionen f_k von Übungsblatt 7, Aufgabe 5 ist stetig auf ganz $\mathbb{R}$.

5. Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit der Eigenschaft $f(x + y) = f(x) + f(y)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$. Zeige dann die folgenden Aussagen

   (a) Für alle $r \in \mathbb{Q}$ und alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $f(rx) = rf(x)$.

   (b) Existiert ein nicht-triviales Intervall I, auf dem f beschränkt ist, so ist f im Nullpunkt stetig.

   (c) Ist f im Nullpunkt stetig, so ist f auf ganz $\mathbb{R}$ stetig.

   (d) Ist f auf $\mathbb{R}$ stetig, so gilt $f(x) = ax$ mit einem $a \in \mathbb{R}$.