Abteilung: Angewandte Analysis
Prof. Dr. Werner Balser
Übungsleiter: Jens Dittrich

Übungen zur Analysis I - Zusatzblatt zur Punkteverbesserung

Abgabe: spätestens Dienstag den 01. August, 12:00 Uhr
in der Helmholtzstr. 18 Raum 232 bzw. Raum 210
(Übungscheinkriterium: 130 Punkte = 50% aus Blatt 1 bis 13)

Name: **Vorname:** **Tutor:**

Aufgabe	1	2	3	4	5	Summe
Soll	3	6	2	4	5	20
Ist						

Bis auf solche Fakten, die aus dem Vorlesungsbetrieb bekannt sind, müssen alle verwendeten Aussagen gut formuliert und bewiesen werden. Der Lösungsweg muss deutlich erkennbar sein.

1. Bestimme die folgenden Grenzwerte.

   (a) $\lim_{x\to\infty} x^\alpha e^{-x}, \quad \alpha \geq 0,$ (b) $\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x.$

2. Untersuche die folgenden Funktionen f, g, h definiert auf $(0,\infty)$ auf Nullstellen, Extremstellen und Monotonie.

   (a) $f(x) = \frac{\log x}{x},$ (b) $g(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)^x,$ (c) $h(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1}.$

   Skiziere f, g und h. Zeige weiter, dass g das offene Intervall $(0,\infty)$ bijektiv auf das offene Intervall $(1,e)$ abbildet und dass h das offene Intervall $(0,\infty)$ bijektiv auf das offene Intervall (e,∞) abbildet.

3. Beweise die folgenden Implikationen

   (a) $0 < y < x \leq e \quad \Rightarrow \quad y^x < x^y,$ (b) $e \leq x < y \quad \Rightarrow \quad y^x < x^y.$

   (Hinweis: Halte y fest und "logarithmiere" die Ungleichungen.)

Bitte wenden!

4. Bearbeite die folgenden Aufgaben zu dem Problem

$$\text{Finde } 0 < y < x \text{ so dass die Gleichung } x^y = y^x \text{ erfüllt wird.}$$

(a) Die Lösungen bilden eine ein-parametrige Schar. Genauer: genau dann wenn

$$x = \left(1 + \frac{1}{r}\right)^{r+1}, \qquad y = \left(1 + \frac{1}{r}\right)^{r}$$

mit einem beliebigen $r > 0$ gilt, sind x und y Lösungen des obigen Problems.

(b) Bestimme alle Lösungen, für die $x, y \in \mathbb{N}$ mit $y < x$ richtig ist.

5. Beweise die Aussagen für die Funktion

$$f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}, \qquad x \neq 0.$$

(a) Für $x \neq 0$ ist f beliebig oft differenzierbar und die Ableitungen lassen sich schreiben als

$$f^{(k)}(x) = p_k(x) x^{-3k} f(x),$$

für $k \in \mathbb{N}_0$. Hierbei sind $p_k(x)$ nicht näher bestimmte Polynome.

(b) Im Falle $x = 0$ ist f stetig in die 0 fortsetzbar. Weiter ist f auch hier beliebig oft differenzierbar.

(c) Bestimme die Taylorentwicklung von f in der Stelle $x_0 = 0$.