Universität Ulm
Prof. Dr. Rüdiger Kiesel
M. Scherer

17.12.2005
Wintersemester 2005/06
9.00 - 12.00 Uhr

1. Klausur zur Vorlesung Analysis I

Zur Verwendung in der Klausur sind nur dokumentenechte Stifte (nicht in Rot) sowie ein handschriftlich beschriebenes Din A4 Blatt zugelassen.

Name: ____________________ Vorname: ____________________

Matrikel Nr.: ____________________ Studiengang: ____________________

Semester: ____________________ Trainingscamp: Ja: ☐ Nein: ☐

Frage	Punkte	Max	Frage	Punkte	Max
1		8	6		24
2		15	7		5
3		7	8		12
4		6	9		8
5		9	10		6
			Total		100

Aufgabe 1 **(8 Punkte)**

(a) Berechne den Real- und Imaginärteil folgender komplexer Zahlen z sowie deren Betrag $|z|$: **(4)**

$$i) \quad z = \frac{i-3}{2+i}, \quad ii) \quad z = (1+i)(2+i)\overline{(1+i)}(2-i).$$

(b) Skizziere die Menge M in der Gaußschen Zahlenebene, wobei **(4)**

$$M = \{z \in \mathbb{C} : |z-i| = |z+i|\}.$$

Aufgabe 2 **(15 Punkte)**

Zeige jeweils mittels vollständiger Induktion:

(a) $a_n = 5^n - 1$ ist für alle $n \in \mathbb{N}$ durch 4 teilbar. **(5)**

(b) Die Folge $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sei definiert durch: $b_1 = 1$, $b_2 = 11$ und $b_n = 2b_{n-1} + 3b_{n-2}$ für $n \geq 3$. Zeige: **(5)**

$$b_n = 3^n + 2(-1)^n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

(c) Die Folge $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sei definiert durch: $c_1 = \frac{1}{2}$ und $c_{n+1} = \frac{c_n^2+2}{3}$ für $n \geq 1$. Zeige: i) $0 \leq c_n \leq 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$ und ii) $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ist monoton wachsend. **(5)**

Aufgabe 3 **(7 Punkte)**

Seien $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ und $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ reellwertige und beschränkte Folgen mit $a_n \geq 0$ und $b_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Definiere die Folge $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ durch $c_n = a_n b_n$.

(a) Zeige: **(5)**

$$\sup\{c_n : n \in \mathbb{N}\} \leq \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\} \sup\{b_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

(b) Konstruiere ein Beispiel für nichtnegative, beschränkte Folgen $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ und $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, bei denen in obiger Ungleichung die Relation $<$ gilt. **(2)**

Aufgabe 4 **(6 Punkte)**

Es sei $\mathcal{M}$ die Menge aller komplexwertigen und konvergenten Folgen, also

$$\mathcal{M} = \left\{\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}} : \exists \lim_{n\to\infty} z_n \in \mathbb{C}\right\}.$$

Auf $\mathcal{M}$ definieren wir die Relation $\sim$ durch:

$$\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}} \sim \{w_n\}_{n\in\mathbb{N}} \Leftrightarrow z_n - w_n \to 0, \quad (n \to \infty).$$

(a) Zeige: $\sim$ ist eine Äquivalenzrelation auf $\mathcal{M}$. **(4)**

(b) Bestimme alle Äquivalenzklassen der Relation $\sim$ und gebe jeweils einen Repräsentanten an. **(2)**

Aufgabe 5 **(9 Punkte)**

Berechne: **(5+4)**

$$a) \quad \sum_{k=0}^{n}\sum_{v=k}^{n} \binom{v}{k} 3^{-v}, \qquad b) \quad \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{2}{k+1} + \frac{1}{k+2}\right).$$

Aufgabe 6 **(24 Punkte)**

Untersuche folgende Folgen $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ auf Konvergenz und bestimme gegebenenfalls deren Grenzwert. Hat eine divergente Folge mehrere Häufungswerte, so bestimme diese. **(je 4)**

$a)\quad a_n = \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^n,\qquad b)\quad a_n = \frac{2+(-1)^n n^2}{n+3n^2},$

$c)\quad a_n = \frac{n^3}{2^n},\qquad d)\quad a_n = \sum_{k=1}^{n} \log\left(1+\frac{1}{k}\right),$

$e)\quad a_n = \sqrt{25n^4+20n^2} - 5n^2,\qquad f)\quad a_1 = \frac{1}{2},\quad a_{n+1} = \frac{a_n^2+2}{3},\quad n \geq 1.$

Hinweis zu f): Die Ergebnisse von Aufgabe 2.c) können hier benutzt werden.

Aufgabe 7 **(5 Punkte)**

Gegeben seien die nichtleeren Mengen X und Y sowie eine Abbildung $f : X \to Y$. Es seien A_1 und A_2 Teilmengen von X.

(a) Zeige: $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$. **(3)**

(b) Gebe ein Beispiel dafür an, dass in a) keine Gleichheit bestehen muss. **(2)**

Aufgabe 8 **(12 Punkte)**

Untersuche folgende unendliche Reihen auf Konvergenz: **(je 4)**

$$a)\quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt[k]{k}},\qquad b)\quad \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}),\qquad c)\quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}\left(e - \left(1+\frac{1}{k}\right)^k\right).$$

Hinweis zu c): $(1+\frac{1}{k})^k \leq e \leq (1+\frac{1}{k})^{k+1}$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 9 **(8 Punkte)**

Bestimme, falls existent (ohne Beweis): $\inf A$, $\min A$, $\sup A$ und $\max A$, wobei **(je 4)**

(a) $A = \left\{x \in \mathbb{R} : x = (-1)^n + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)},\quad n \in \mathbb{N}\right\}$,

(b) $A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 10x \leq 24\}$.

Aufgabe 10 **(6 Punkte)**

(a) Sei $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge, d.h. $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, und $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge. Zeige mittels der Definition für Folgenkonvergenz, dass auch $\{a_n b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist. **(4)**

(b) Kann in a) jeweils *Nullfolge* durch *konvergente Folge* ersetzt werden? **(2)**