U. Stadtmüller
H. Lanzinger

WS 2001/2002
15.12.2001

1. Klausur zu Analysis I

Zeit: 180 min
Hilfsmittel: Zwei handgeschriebene Blätter (DIN A4).
Zu erreichen sind 107 Punkte. 100 Punkte entsprechen 100%.

1. Bestimme zu folgenden Mengen M, falls existent, jeweils Supremum, Maximum, Infimum und Minimum:

   (a) $M_1 = \{x \in \mathbb{R} \mid x(x-1)(x+2) > 0\}$,

   (b) $M_2 = \left\{ \dfrac{n-m}{n+3m} \mid n, m \in \mathbb{N} \right\}$.

   Beweise die Aussagen im Teil (b). (4+7)

2. Skizziere die Menge

   $$M_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) > 0,\ \mathrm{Im}(z) > 0 \text{ und } \mathrm{Re}(z) + \mathrm{Im}(z) \le 1\}.$$

   Bestimme (ohne Beweis) zur Menge $M_2 = \{|z| \mid z \in M_1\}$, falls existent, $\sup M_2$, $\inf M_2$ sowie $\max M_2$ und $\min M_2$. (7)

3. Beweise folgende Aussagen für $n \in \mathbb{N}_0$:

   (a) $4^{-n} \cdot \binom{2n}{n} = (-1)^n \cdot \binom{-1/2}{n}$.

   (b) Zeige, dass für $x_1, \ldots, x_n \ge 0$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt:

   $$\prod_{k=1}^{n} (1 + x_k) \ge 1 + \sum_{k=1}^{n} x_k .$$

   (je 6)

4. Berechne die Doppelsumme

   $$\sum_{k=0}^{n} \sum_{j=k}^{n} \binom{j}{k} \frac{3^k}{2^j} .$$

   (5)

5. Gegeben sei die Folge $(a_n)_{n=1}^\infty$, wobei $a_n = \dfrac{3n^3 - 4n^2}{n^3 + 2n^2 + 3}$. Untersuche diese Folge mit Hilfe der Definition auf Konvergenz. (7)

6. Untersuche nachstehende Folgen $(a_n)_{n=1}^\infty$ auf Konvergenz und bestimme gegebenenfalls den Grenzwert:

   (a) $a_n = \dfrac{(n+1)^3}{(n^2+1)(3n-2)}$,

   (b) $a_n = n\left(\sqrt{n^2+1} - n\right)$,

   (c) $a_n = n^2 z^n$ mit $|z| < 1$,

   (d) $a_1 = 2$, $a_{n+1} = \sqrt{3a_n + 10}$. (4+5+5+6)

7. Bestimme jeweils die Menge der Häufungswerte, sowie Limes superior und Limes inferior der Folge $(a_n)_{n=1}^\infty$:

   (a) $a_n = (-1)^n \cdot \left(3 - \dfrac{2}{n}\right)$,

   (b) $a_n = \dfrac{n^2}{5n+1} - \left[\dfrac{n}{5}\right]$.

   (je 6)

8. Gegeben seien zwei nichtnegative beschränkte Folgen $(a_n)_{n=1}^\infty$ und $(b_n)_{n=1}^\infty$.

   (a) Zeige: Wenn $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ ist, dann folgt:

   $$\limsup_{n\to\infty}(a_n b_n) = a \cdot \limsup_{n\to\infty} b_n \, .$$

   (b) Gilt stets $\limsup\limits_{n\to\infty}(a_n b_n) = \limsup\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \limsup\limits_{n\to\infty} b_n$? (Beweis oder Gegenbeispiel) (8+5)

9. Untersuche die folgenden unendlichen Reihen auf Konvergenz und absolute Konvergenz:

   a) $\displaystyle\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{e}\left(1 + \frac{1}{k}\right)^k$, b) $\displaystyle\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{3^k}\left(1 + \frac{1}{k}\right)^k$,

   c) $\displaystyle\sum_{k=1}^\infty \frac{k^2}{e^{\sqrt{k}}}$, c) $\displaystyle\sum_{k=1}^\infty (-1)^k \left(\sqrt[k]{x} - 1\right)$ mit $x > 1$.

   (je 5)