U. Stadtmüller
H. Lanzinger

WS 2002/2003
14.12.2002

1. Klausur zu Analysis I

Zeit: 180 min
Hilfsmittel: Zwei handgeschriebene Blätter (DIN A4).
Zu erreichen sind 106 Punkte. 100 Punkte entsprechen 100%.

1. Es sei eine Funktion $f\colon A \to B$ gegeben.
   Zeige, dass für $B_1, B_2 \subset B$ gilt:
   $$f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2).$$
   (6)

2. Bestimme zu der Menge
   $$M = \left\{ \frac{1}{n} - \frac{2}{m} \mid n, m \in \mathbb{N} \right\},$$
   falls existent, Supremum, Maximum, Infimum und Minimum. (8)

3. Gegeben seien beschränkte Mengen $A, B \subset \mathbb{R}$.
   Definiere die Menge $A - B := \{a - b \mid a \in A, b \in B\}$.
   Beweise, dass $A - B$ beschränkt ist und zeige:
   $$\sup(A - B) = \sup A - \inf B.$$
   (8)

4. Definiere $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ durch
   $$a_0 = a_1 = 1, \quad a_{n+1} = a_n + a_{n-1} \text{ für } n \in \mathbb{N}.$$
   Zeige, dass für $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:
   $$a_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n-k}{k}.$$
   (6)

5. Gegeben sei die Menge $\mathcal{M}$ aller reellen Zahlenfolgen, die die Cauchy–Bedingung erfüllen. Definiere auf $\mathcal{M}$ eine Relation R durch
   $$(x_n)_{n=1}^{\infty} \overset{R}{\sim} (y_n)_{n=1}^{\infty} \iff \lim_{n\to\infty} (x_n - y_n) = 0.$$
   (a) Zeige, dass hierdurch eine Äquivalenzrelation definiert wird.

(b) Versuche, einen möglichst einfachen Repräsentanten jeder Äquivalenzklasse anzugeben. (6+2)

6. Gegeben sei die Folge $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, wobei $a_n = \dfrac{4n^4 + 2n^2}{2n^4 + n^3 + 1}$. Bestimme den Grenzwert dieser Folge und beweise die Konvergenz mit Hilfe der Definition. (7)

7. Es gelte $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a > 0$ und $a_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
   Beweise, dass $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^r = a^r$ für alle $r \in \mathbb{R}$. (6)

8. Untersuche nachstehende Folgen $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ auf Konvergenz und bestimme gegebenenfalls den Grenzwert:

   (a) $a_1 = 5\ ,\ a_{n+1} = \sqrt{6a_n + 7}\ ,$

   (b) $a_n = n^{2/3}\left(\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}\right)\ .$ (6+7)

9. Bestimme jeweils die Menge der Häufungswerte, sowie Limes superior und Limes inferior der Folgen $(a_n)_{n=1}^{\infty}$:

   (a) $a_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{(-1)^n n}\ ,$

   (b) $a_n = \left(2 - \dfrac{4}{n}\left[\dfrac{n}{4}\right]\right)^{n}\ .$ (6+6)

10. Gegeben seien zwei beschränkte Folgen $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ und $(b_n)_{n=1}^{\infty}$.
    Beweise:
    $$\limsup_{n\to\infty}(a_n - b_n) \le \limsup_{n\to\infty} a_n - \liminf_{n\to\infty} b_n\ .$$
    Gilt sogar stets das Gleichheitszeichen? (Beweis oder Gegenbeispiel) (8)

11. Untersuche die folgenden unendlichen Reihen auf Konvergenz und absolute Konvergenz:

    (a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2 + k^3 2^{-k} + 2}{k^4 + 1}\ ,$

    (b) $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\log k}\ ,$

    (c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^{-k^2}\ .$ (je 6)

12. Bestimme alle Funktionen $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, die
    $$f(m + 2n) = f(m) + 3f(n)$$
    für alle $m, n \in \mathbb{Z}$ erfüllen. (6)