H. Lanzinger
M. Riesner

Wintersemester 2003/2004
20.12.2003

1. Klausur zur Analysis für Informatiker

Zeit: 120 min
Hilfsmittel: Ein beliebig beschriebenes Blatt (DIN A4).
Zu erreichen sind 104 Punkte. 100 Punkte entsprechen 100%.
Bitte jede Aufgabe auf einem neuen Blatt beginnen.

1. Bestimme für
$$z = \frac{3+2i}{2i-1}$$
den Real- und Imaginärteil, die zu z konjugiert komplexe Zahl sowie ihren Betrag. (8)

2. Es seien $T_1, T_2 \subseteq \mathbb{R}$, nichtleer und beschränkt.
Zeige: Es existiert das Supremum von $T_1 \cup T_2$ und es gilt
$$\sup(T_1 \cup T_2) = \max\{\sup T_1, \sup T_2\}.$$
(10)

3. Bestimme zu der Menge
$$M = \left\{ \frac{3}{m} - \frac{2}{n} \mid n, m \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\} \cup \{2\},$$
falls existent, Supremum und Maximum. (12)

4. Zeige, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ und für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt:
$$\sum_{\nu=0}^{n} \binom{\nu+\alpha}{\nu} = \binom{n+\alpha+1}{n}$$
(12)

5. Gegeben sei die Folge $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, wobei $a_n = \dfrac{n^3+2n}{3n^3+\log n}$. Bestimme den Grenzwert dieser Folge und beweise die Konvergenz mit Hilfe der Konvergenzdefinition. (12)

6. Untersuche nachstehende Folgen $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ auf Konvergenz und bestimme gegebenenfalls den Grenzwert:
   (a) $a_n = \dfrac{n^2+2^n-3^n}{3^n+n^2 2^n}$,
   (b) $a_n = \sqrt{9n^2+2n+1} - 3n$,
   (c) $a_n = \left(\dfrac{1+(-1)^n n}{3+n}\right)^n$,
   (d) $a_0 = \dfrac{1}{2}, \quad a_{n+1} = \sqrt{2a_n+3}$.

   (3+4+3+6)

7. Gegeben seien zwei beschränkte, reelle Folgen $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ und $(b_n)_{n=0}^{\infty}$.
Beweise:
$$\liminf_{n\to\infty}(a_n - b_n) \geq \liminf_{n\to\infty} a_n - \limsup_{n\to\infty} b_n$$
Gilt sogar stets das Gleichheitszeichen? (Beweis oder Gegenbeispiel)

8. Untersuche die folgenden unendlichen Reihen auf Konvergenz und absolute Konvergenz:
   (a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\left(1+\frac{1}{k}\right)^k}$
   (b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\log(k+2)}$
   (c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^3+2k^2+1}{k^5+k-1}$
   (d) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} k^4 e^{-k^2}$

9. Sei $a_n \geq 0 \ \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Zeige:
Konvergiert die Reihe $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, so ist auch $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{a_k}}{k^\alpha}$ für $\alpha > \frac{1}{2}$ konvergent.