12.6.2004

# 1. Klausur zu Analysis I

Hilfsmittel: Vorlesungsmitschrift, Übungsaufgaben, keine Bücher, kein Taschenrechner

Bitte jede Aufgabe auf einem gesonderten Blatt lösen!

Bearbeitungszeit: 120 Minuten

Es sind 103 Punkte erreichbar. 100 Punkte sind 100%.

**Aufgabe 1:** (6 + 5 Punkte)

a) Bestimme — soweit existent — das Infimum, Supremum, Minimum und Maximum von

$$T = \{ e^{-m} - \log n \mid m, n \in \mathbb{N} \} .$$

b) Es seien $A, B$ zwei nicht–leere, nach unten beschränkte Mengen reeller Zahlen. Zeige:

$$\inf(A \cup B) = \min\{ \inf A, \inf B \}$$

**Aufgabe 2:** (5 + 5 + 7 Punkte)

Beweise für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und $a \in \mathbb{C}$:

a) $(1-a)\prod_{k=0}^{n-1}\left(1+a^{2^k}\right) = 1 - a^{2^n}$ b) $\binom{-1/2}{n} \cdot 4^n = (-1)^n \binom{2n}{n}$

c) $n! \cdot e^n \geq (n+1)^n$

**Aufgabe 3:** (8 Punkte)

Berechne für $n \in \mathbb{N}$ den Wert der Doppelsumme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sum_{\ell=k}^{n} \frac{2k-1}{\ell^3(\ell+1)}$ .

**Aufgabe 4:** (je 5 Punkte)

Im folgenden ist jeweils das $n$–te Glied einer Folge angegeben. Untersuche die Folge auf Konvergenz und bestimme gegebenenfalls ihren Grenzwert.

a) $\dfrac{12n^2 + n\log n}{(2n-1)^2}$ b) $\dfrac{n^7 + 7^n}{7^n + (-5)^n}$ c) $\left(\dfrac{n(n+(-1)^n)}{2+n^2}\right)^n$

d) $\log_n(3n^3+5)$ e) $\sqrt[n]{\log n}$

**Aufgabe 5:** (6 Punkte)

Gegeben seien zwei konvergente reelle Folgen, etwa $a_n \longrightarrow a,\ b_n \longrightarrow b$.

Beweise: $\max\{ a_n , b_n \} \longrightarrow \max\{a, b\}$ .

(Hinweis: Zeige zunächst, daß für $x, y \in \mathbb{R}$ stets $\max\{x, y\} = \dfrac{x+y+|x-y|}{2}$ ist.)

**Aufgabe 6:** (8 Punkte)

Gegeben seien zwei reelle Zahlenfolgen $(a_n)$, $(c_n)$. Beweise:

Konvergiert $(a_n)$ gegen eine positive Zahl $a$, so ist $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n c_n = a \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, c_n$ .

**Aufgabe 7:** (18 Punkte)

Untersuche die folgenden Reihen auf Konvergenz.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$ b) $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{\log n}}$ c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3+i}{4}\right)^n$

Bestimme den Wert von einer der konvergenten Reihen.

**Aufgabe 8:** (10 Punkte)

Entscheide, welche der folgenden Aussagen wahr und welche falsch sind (ohne Beweis). Kreu
dazu das entsprechende Feld in der beigehefteten Tabelle an.
Die getroffenen Entscheidungen werden folgendermaßen bewertet: Ein richtig gesetztes Kre
ergibt einen Punkt, ein falsch gesetztes einen Minuspunkt. Bei einer negativen Gesamtsumm
wird die Aufgabe mit 0 Punkten bewertet.

1. Sind $f, g$ Funktionen mit $\mathrm{Def}(g) = \mathrm{Bild}(f)$ und ist $g \circ f$ injektiv, so ist auch $g$ injekti
2. Es gibt antisymmetrische Relationen, die symmetrisch sind.
3. Auf der Menge aller Folgen positiver Zahlen ist eine Äquivalenzrelation $\sim$ erklärt dur
   $(a_n) \sim (b_n) \iff \lim\limits_{n\longrightarrow\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = 1$ .
4. Die Menge $\mathbb{N} \times \mathbb{Q}$ ist abzählbar.
5. Es gibt geordnete endliche Körper.
6. Jede nicht–leere beschränkte Menge rationaler Zahlen besitzt ein Supremum in $\mathbb{Q}$ .
7. Für jede Folge positiver reeller Zahlen $(a_n)$ gilt $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} \dfrac{1}{a_n} = 1 \Big/ \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n$ .
8. Ist $(x_n)$ eine konvergente Folge in $\mathbb{R}$ mit $x_n > 1\ \forall n$, dann ist $\lim\limits_{n\to\infty} x_n > 1$ .
9. Ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent und $(b_n)_{n\geq 1}$ beschränkt, so ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ ebenfalls konvergent.
10. Konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ , so ist $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty$ .