U. Stadtmüller
H. Lanzinger

WS 2001/2002
09.02.2001

2. Klausur zu Analysis I

Zeit: 180 min
Hilfsmittel: Zwei handgeschriebene Blätter (DIN A4).
Zu erreichen sind 108 Punkte. 100 Punkte entsprechen 100%.
Alle Antworten sind zu begründen.

1. Bestimme den Konvergenzradius folgender Potenzreihen und untersuche in (a) und (b) das Verhalten auf dem Rand des Konvergenzkreises.

   (a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(iz)^k}{3^k}$.

   (b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k!}{k^k}\, z^k$.

   (c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \left(1 - \frac{3+(-1)^k}{k}\right)^{k^2} z^k$. (12)

2. Gegeben sei die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - 3x^2$ und $x_0 = 1$.
   Bestimme zu $\epsilon > 0$ jeweils ein $\delta = \delta(\epsilon) > 0$, dass für alle $x \in U_\delta(x_0)$ gilt: $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$. (6)

3. Für welche Paare (a, b) ist die durch

   $$f(x) = \begin{cases} (x+a)^2 & \text{für } x \geq 0 \\ \frac{\sin(bx)}{x} & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

   definierte Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und für welche differenzierbar? (6)

4. Berechne die Ableitungen der folgenden Funktionen auf ihrem Definitionsbereich.

   (a) $f(x) = \sqrt{x^x + e^{\sin x}}$,

   (b) $f(x) = \log\left(\arcsin \sqrt{x}\right)$. (8)

5. (a) Beweise, dass die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + x + 1 - \sin x$ keine Nullstelle besitzt.

   (b) Zeige, dass die Umkehrfunktion f^{-1} zu $f\colon [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + x + 1 - \sin x$ existiert. Bestimme $(f^{-1})'(\pi^2 + \pi + 1)$. (8)

6. Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein beschränktes Intervall und $f\colon I \to \mathbb{R}$ gleichmäßig stetig.
   Beweise, dass f beschränkt ist. (8)

7. Bestimme lokale Extremalstellen sowie, im Falle der Existenz, das Maximum der Funktion
$$f\colon [-4,4] \to \mathbb{R}, \quad f(x) = 3x^4 + 8x^3 - 48x^2 + 2.$$
(10)

8. Berechne folgende Grenzwerte im Falle ihrer Existenz:
   (a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan x}{\sinh x}$.
   (b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1 - xe^{x/2}}{x^2}$.
   (c) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}-} (\cos x)^{x-\frac{\pi}{2}}$. (12)

9. Die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei differenzierbar und es gelte $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x) = a$.
   Beweise für $x \in \mathbb{R}$:
$$\lim_{x\to\infty} \left(f(x+b) - f(x)\right) = ab.$$
(6)

10. Beweise die Identität:
$$\operatorname{Arcosh} x = \log\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)$$
für $x \geq 1$. (6)

11. $f\colon I \to J$ und $g\colon J \to \mathbb{R}$ seien konvexe Funktionen, g sei zudem monoton wachsend.
    Beweise, dass $g \circ f$ konvex ist. (6)

12. Entwickle folgende Funktionen in eine Taylorreihe um den angegebenen Punkt und entscheide, wo die Potenzreihe die Funktion darstellt:
    (a) $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ um $x_0 = 5$.
    (b) $f(x) = \dfrac{x}{1-x}$ um $x_0 = 4$.
    (c) $f(x) = \cos x$ um $x_0 = \dfrac{\pi}{2}$. (12)

13. $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ sei eine konvexe Funktion ($a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$) .
    Beweise, dass f auf jedem kompakten Intervall $I \subset (a,b)$ Lipschitz–stetig ist. (8)