U. Stadtmüller
H. Lanzinger

WS 2002/2003
08.02.2003

2. Klausur zu Analysis I

Zeit: 150 min
Hilfsmittel: Zwei handgeschriebene Blätter (DIN A4).
Zu erreichen sind 89 Punkte. 80 Punkte entsprechen 100%.
Alle Antworten sind zu begründen.

1. Bestimme den Konvergenzradius folgender Potenzreihen und untersuche auf Konvergenz auf dem Rand des Konvergenzkreises:

   (a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^k}{k^2+3}\, z^k$.

   (b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{2+(-1)^k}{3k}\right)^{k^2} z^k$. (10)

2. Gegeben sei die Funktion $f\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$ und $x_0 = 2$.

   Bestimme zu $\epsilon > 0$ jeweils ein $\delta = \delta(\epsilon) > 0$, so dass

   $$|f(x) - f(x_0)| < \epsilon \quad \text{für alle } x \in U_\delta(x_0).$$

   (6)

3. Untersuche die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$ auf gleichmäßige Stetigkeit. (6)

4. Berechne die Ableitungen der folgenden Funktionen auf ihrem Definitionsbereich:

   (a) $f(x) = (\log x)^3 e^{\sin x}$,

   (b) $f(x) = \arccos x$ als Umkehrfunktion des Kosinus. (8)

5. Untersuche nachstehende Funktion auf Stetigkeit und Differenzierbarkeit:

   $$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = [x] + (x - [x])^2 .$$

   (8)

6. Berechne folgende Grenzwerte im Falle ihrer Existenz:

   (a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{2x}-1}{\arcsin x}$.

   (b) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{x \sin x} \right)$.

   (c) $\lim\limits_{x\to\infty} x \left(a^{1/x} - 1 \right)$. (4+5+4)

7. Beweise, dass für $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\arctan x = \arcsin \left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \right) .$$

(5)

8. Bestimme lokale Extremalstellen sowie, im Falle der Existenz, Maximum und Minimum der Funktionen:

   (a) $f\colon [-3,4] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{3}{2}x^4 + 2x^3 - 18x^2 + 10$.

   (b) $f\colon \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin^2 x \cos x$. (12)

9. Entwickle folgende Funktionen in eine Taylorreihe um den angegebenen Punkt und entscheide, wo die Potenzreihe die Funktion darstellt:

   (a) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ um $x_0 = 3$.

   (b) $f(x) = \log\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$ um $x_0 = 0$. (4+5)

10. Es seien $f, g\colon I \to \mathbb{R}$ konvexe Funktionen.

    (a) Beweise, dass $\max\{f, g\}$ auf I konvex ist.

    (b) Beweise oder widerlege: $f \cdot g$ ist stets konvex auf I . (4+2)

11. Gegeben sei eine gleichmäßig stetige Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
    Zeige, dass ein $L > 0$ existiert mit $|f(x)| \le L(1 + |x|)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. (6)