Universität Ulm
Prof. Dr. Rüdiger Kiesel
M. Scherer

18.2.2006
Wintersemester 2005/06
9.00 - 12.00 Uhr

2. Klausur zur Vorlesung Analysis I

Zur Verwendung in der Klausur sind nur dokumentenechte Stifte (nicht in Rot) sowie ein handschriftlich beschriebenes Din A4 Blatt zugelassen. Alle Antworten sind zu begründen. Viel Erfolg.

Name: ________________ Vorname: ________________

Matrikel Nr.: ________________ Studiengang: ________________

Semester: ________________ Trainingscamp: Ja: ☐ Nein: ☐

Frage	Punkte	Max	Frage	Punkte	Max
1		10	6		8
2		12	7		12
3		10	8		6
4		12	9		5
5		10	10		15
			Total		100

Aufgabe 1 **(10 Punkte)**

(a) Zeige mit Hilfe der Definition, dass die Funktion $f : [1, \infty) \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \frac{1}{x}$ auf $[1, \infty)$ gleichmäßig stetig ist. **(5)**

(b) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion mit $|f'(x)| \leq K < \infty$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Zeige, dass f auf $\mathbb{R}$ gleichmäßig stetig ist. **(5)**

Aufgabe 2 **(12 Punkte)**

(a) Untersuche folgende Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ auf Stetigkeit: **(je 4)**

$$(i) \quad f(x) = \begin{cases} x & \text{für} \quad x \in \mathbb{Q} \\ 1 - x & \text{für} \quad x \notin \mathbb{Q} \end{cases}, \qquad (ii) \quad f(x) = \begin{cases} \cos(1/x) & \text{für} \quad x \neq 0 \\ 1 & \text{für} \quad x = 0 \end{cases}.$$

(b) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{Q}$ stetig. Zeige, dass f konstant ist. **(4)**

Aufgabe 3 **(10 Punkte)**
Untersuche folgende unendliche Reihen auf Konvergenz: **(je 3)**

$$a) \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{7^k} \binom{3k}{k}, \qquad b) \quad \sum_{k=1}^{\infty} \left(\alpha + \frac{1}{k}\right)^k, \; \alpha \in \mathbb{R}, \qquad c) \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2 + (-1)^k}{k!}.$$

Berechne bei einer dieser Reihen den Reihenwert. **(1)**

Aufgabe 4 **(12 Punkte)**

(a) Berechne den Konvergenzradius folgender Potenzreihen: **(je 4)**

$$(i) \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^k}{k!} z^k, \qquad (ii) \quad \sum_{k=1}^{\infty} 3^k z^{5k}.$$

(b) Gegeben sei eine gerade Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, d.h. $f(x) = f(-x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Diese Funktion besitze eine Potenzreihenentwicklung um den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ mit Konvergenzradius $R = \infty$. Zeige, dass in dieser Potenzreihenentwicklung nur gerade Exponenten vorkommen, d.h. $a_{2k+1} = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$. **(4)**

Aufgabe 5 **(10 Punkte)**

(a) Berechne folgende Funktionsgrenzwerte, falls existent: **(je 3)**

$$(i) \quad \lim_{x \to 0} \frac{e^{\sin(x)} - \cos(x)}{\tan(x)}, \qquad (ii) \quad \lim_{x \to 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos(x)}.$$

(b) Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei n-mal differenzierbar auf $\mathbb{R}$ und es gelte

$$\lim_{x \to \infty} f^{(n)}(x) = 42.$$

Zeige, dass dann auch $\lim_{x \to \infty} \frac{n! f(x)}{x^n} = 42$ gilt. **(4)**

Aufgabe 6 **(8 Punkte)**

(a) Bestimme, wo möglich, $\arcsin(x)'$ mittels des Satzes über die Ableitung der Umkehrfunktion. **(3)**

(b) Verifiziere folgende Identität: **(5)**

$$\arctan(x) = \arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Aufgabe 7 **(12 Punkte)**
Betrachte die Funktion $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = xe^{1/x}$. Untersuche f auf ...

(a) ... Stetigkeit bzw. Differenzierbarkeit. Berechne, falls möglich, f' sowie f''. **(3)**

(b) ... lokale und globale Extrema. **(3)**

(c) ... Konvexität und Konkavität. **(3)**

(d) Skizziere f mittels der Informationen aus (a)-(c) sowie des Verhaltens am Rand des Definitionsbereiches. **(3)**

Aufgabe 8 **(6 Punkte)**
Zeige: Eine auf ganz $\mathbb{R}$ defnierte Funktion f ist genau dann ein Polynom vom Grad höchstens $n \in \mathbb{N}_0$, wenn f auf $\mathbb{R}$ mindestens $(n+1)$-mal differenzierbar ist und

$$f^{(n+1)}(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

gilt.

Aufgabe 9 **(5 Punkte)**
Entwickle $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \neq 0$, in eine Taylorreihe um $x_0 = 12$ und entscheide, wo die Potenzreihe die Funktion darstellt.

Aufgabe 10 **(15 Punkte)**
Berechne folgende Integrale: **(je 3)**

$$(i) \quad \int_0^1 xe^x dx, \qquad (ii) \quad \int_0^{1/2} \arcsin(x) dx,$$

$$(iii) \quad \int_0^{2\pi} |\cos(x)| dx, \qquad (iv) \quad \int_0^1 xe^{-x^2} dx, \qquad (v) \quad \int_0^{100} [x] dx.$$