Universität Ulm
Prof. Dr. Rüdiger Kiesel
M. Scherer

26.4.2006
Wintersemester 2005/06
15.00 - 18.00 Uhr

Nachklausur zur Vorlesung Analysis I

Zur Verwendung in der Klausur sind nur dokumentenechte Stifte (nicht in Rot) sowie ein handschriftlich beschriebenes Din A4 Blatt zugelassen. Alle Antworten sind zu begründen. Viel Erfolg.

Name: ____________________ Vorname: ____________________

Matrikel Nr.: ____________________ Studiengang: ____________________

Semester: ____________________ Trainingscamp: Ja: ☐ Nein: ☐

Frage	Punkte	Max	Frage	Punkte	Max
1		9	7		10
2		5	8		8
3		12	9		6
4		12	10		5
5		5	11		10
6		9	12		9
			Total		100

Aufgabe 1 **(9 Punkte)**

(a) Berechne den Real- und Imaginärteil sowie den Betrag von $\frac{4i}{4+3i}$. **(3)**

(b) Es seien $z \in \mathbb{C}\backslash\{1\}$, $n \in \mathbb{N}$ und $z^n = 1$. Zeige, dass dann gilt: **(3)**

$$\sum_{k=0}^{n-1} z^k = 0.$$

(c) Zeige, dass der Körper $\mathbb{C}$ nicht angeordnet werden kann. **(3)**

Aufgabe 2 **(5 Punkte)**

Berechne den Wert der Summe: **(5)**

$$\sum_{\nu=0}^{n} \sum_{k=\nu}^{n} \binom{n}{k} \binom{k}{\nu} 3^{n-k+\nu} 2^{k-\nu}.$$

Aufgabe 3 **(12 Punkte)**

Zeige jeweils mittels vollständiger Induktion:

(a) $a_n = 6^n - 5n + 4$ ist für alle $n \in \mathbb{N}$ durch 5 teilbar. **(4)**

(b) Die Folge $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ sei definiert durch: $a_0 = a$, $a_1 = b$ und $a_{n+1} = \frac{a_n + a_{n-1}}{2}$ für $n \geq 2$. Zeige, dass dann gilt: **(4)**

$$a_{n+1} - a_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n (b-a), \quad \forall n \in \mathbb{N}_0.$$

(c) Zeige, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: **(4)**

$$\sum_{\nu=1}^{n} \nu 2^\nu = (n-1)2^{n+1} + 2.$$

Aufgabe 4 **(12 Punkte)**

Untersuche folgende Folgen $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ auf Konvergenz und bestimme gegebenenfalls deren Grenzwert. Hat eine divergente Folge mehrere Häufungswerte, so bestimme diese. **(je 3)**

a) $a_n = \left(\frac{n+1}{n+5}\right)^n$, *b)* $a_n = \frac{2n^4 + (-1)^n n^3 + 12}{2n^3 + 3 - n^4}$,

c) $a_n = n - 2\left[\frac{n}{2}\right]$, *d)* $a_0 = a$, $a_1 = b$, $a_{n+1} = \frac{a_n + a_{n-1}}{2}$, $n \geq 2$.

Hinweis zu d): Die Ergebnisse von Aufgabe 3.b) können hier benutzt werden.

Aufgabe 5 **(5 Punkte)**

Für die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gelte $|f(x) - f(y)| \leq L|x-y|^\alpha$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$, mit Konstanten $L > 0$ und $\alpha > 0$. Zeige, dass die Funktion f auf $\mathbb{R}$ gleichmäßig stetig ist.

Aufgabe 6 **(9 Punkte)**

(a) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei eine beschränkte Funktion. Zeige, dass dann **(3)**

$$f(x) = x \cdot g(x)$$

stetig in 0 ist.

(b) Untersuche folgende Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ auf Stetigkeit: **(je 3)**

$$(i) \quad f(x) = \begin{cases} x & \text{für} \quad x \notin \mathbb{Q} \\ 1 - x & \text{für} \quad x \in \mathbb{Q} \end{cases}, \qquad (ii) \quad f(x) = \begin{cases} \sqrt{|x|}\sin(1/x) & \text{für} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{für} \quad x = 0 \end{cases}.$$

Aufgabe 7 **(10 Punkte)**

Untersuche folgende unendliche Reihen auf Konvergenz und absolute Konvergenz: **(je 3)**

$$a) \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k!)^2}{(2k)!}, \qquad b) \quad \sum_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^{k+1} \frac{(-1)^k}{k}, \qquad c) \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (2\pi)^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

Berechne bei einer dieser Reihen den Reihenwert. **(1)**

Aufgabe 8 **(8 Punkte)**

Berechne den Konvergenzradius folgender Potenzreihen: **(je 4)**

$$a) \quad \sum_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{k}\right) z^k, \qquad b) \quad \sum_{k=1}^{\infty} 4^k z^{5k}.$$

Aufgabe 9 **(6 Punkte)**

Berechne folgende Funktionsgrenzwerte, falls existent: **(je 3)**

$$a) \quad \lim_{x \to 0} \frac{x^3}{\log(1+x) - x}, \qquad b) \quad \lim_{x \to \infty} x \left(\frac{\pi}{2} - \arctan(x)\right).$$

Aufgabe 10 **(5 Punkte)**

Verifiziere folgende Identität:

$$\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}, \quad \forall x > 0.$$

Aufgabe 11 **(10 Punkte)**

Betrachte die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \frac{1}{2}x^4 - \frac{8}{3}x^3 + 3x^2 + 5$.

(a) Bestimme und klassifiziere alle lokalen Extrema von $f(x)$. **(4)**

(b) Berechne, falls existent, $\max\limits_{x \in [-1,4]} f(x)$ sowie $\min\limits_{x \in [-1,4]} f(x)$. **(4)**

(c) Skizziere den Graphen von f. **(2)**

Aufgabe 12 **(9 Punkte)**

Berechne die Integrale in a) und b), bestimme eine Stammfunktion bei c): **(je 3)**

$$a) \quad \int_0^{\pi} x \sin(2x)\, dx, \qquad b) \quad \int_1^2 \frac{x^2 - x + 2}{x^3}\, dx, \qquad c) \quad \int \frac{e^x}{1 + e^{2x}}\, dx.$$