Abteilung: Analysis
Prof. Dr. Friedmar Schulz
Übungsleiter: Jens Dittrich

Übungen zur Analysis II - Blatt 1
Abgabe: 25. Oktober, 12:00 Uhr vor der Übung

Name: **Vorname:** **Tut.: Mo: □, Di: □, Mi: □**

Aufgabe	1	2	3	4	5	Summe
Soll	3	6	4	4	3	20
Ist						

Bis auf solche Fakten, die aus dem Vorlesungsbetrieb bekannt sind, müssen alle verwendeten Aussagen gut formuliert und bewiesen werden. Der Lösungsweg muss deutlich erkennbar sein.

1. Sei $x \in \mathbb{R}^n$. Zeige die folgenden Aussagen:

   (a) Gilt für alle $y \in \mathbb{R}^n$ mit $|y| = 1$, dass $(x, y) = 0$ ist, so folgt $x = 0$.

   (b) Sei $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Punktfolge im $\mathbb{R}^n$, welche gegen ein $y \in \mathbb{R}^n$ konvergiert, so folgt
   $$\lim_{k\to\infty} (x, y_k) = (x, y).$$

   (c) Es sei $E \subset \mathbb{R}^n$ eine in $\mathbb{R}^n$ dichte Teilmenge. Gilt nun für alle $y \in E$, dass $(x, y) = 0$ ist, so folgt $x = 0$.

2. Es sei $V = C[0, 1]$ der Vektorraum der stetigen Funktionen $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$.

   (a) Zeige, dann genügt $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ definiert durch
   $$\langle f, g\rangle := \int_0^1 f(x)g(x)\, dx, \quad f, g \in V$$
   den Axiomen des Skalarprodukts.

   (b) Zeige, dass die Funktion $\langle \cdot, \cdot \rangle$ aus Teilaufgabe a) der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung genügt:
   $$\langle f, g\rangle^2 \le \langle f, f\rangle \langle g, g\rangle \quad \text{für alle} \quad f, g \in V.$$
   Hinweis: Betrachte dazu die quadratische Form $\langle \lambda f - \mu g, \lambda f - \mu g\rangle$, unterscheide zwei Fälle und setze im Fall $\langle f, g\rangle \ne 0$ die Größe $\mu = \frac{\langle f,f\rangle}{\langle f,g\rangle}$ und λ geeignet.

   (c) Zeige die Funktion $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}_0^+$ definiert durch
   $$\|f\| := \sqrt{\langle f, f\rangle}, \quad f \in V$$
   genügt den Axiomen der Norm.

   (d) Wir definieren die Größe $\|f\|_\infty := \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$ für $f \in V$. Zeige die Ungleichung $\|f\| \le \|f\|_\infty$ für alle $f \in V$. Zeige weiter, dass es keine Konstante $c > 0$ gibt, so dass
   $$\|f\|_\infty \le c\|f\| \quad \text{für alle} \quad f \in V.$$

Bitte wenden!

3. (a) Sei $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+$ eine Funktion definiert durch

$$d(x,y) := |\arctan x - \arctan y|, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

Zeige, dass d den Axiomen einer Metrik genügt.

(b) Seien zu $k \in \mathbb{N}$ die Abbildungen $d_k : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_0^+$ gegeben, welche den Axiomen der Metrik für jedes $k \in \mathbb{N}$ genügen. Zeige, dann genügt auch

$$d(x,y) := \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \frac{d_k(x,y)}{1 + d_k(x,y)}, \quad x, y \in \mathbb{R}^n$$

den Axiomen der Metrik.

4. Sei $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge im $\mathbb{R}^n$. Wir unterscheiden zwei Definitionen:

- Der Punkt $x \in \mathbb{R}^n$ heißt **Häufungswert** der Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$, wenn es eine Teilfolge $(x_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ gibt mit $x_{k_n} \to x$ für $k \to \infty$.
- Der Punkt $x \in \mathbb{R}^n$ heißt **Häufungspunkt** der Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$, wenn es eine Teilfolge $(x_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ gibt mit $x_{k_n} \neq x$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $x_{k_n} \to x$ für $k \to \infty$.

(a) Zeige jeder Häufungspunkt von $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ist auch Häufungswert von $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$.

(b) Gib ein Beispiel einer Folge an, bei der es einen Häufungswert gibt, der kein Häufungspunkt ist.

(c) Zeige, dass eine Menge aus endlich vielen Punkten keinen Häufungspunkt hat.

(d) Gib ein Beispiel einer unendlichen Menge an, die keinen Häufungspunkt hat.

5. (a) Zeige, dass die Funktion $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_0^+$ mit $\|x\| = \max_{i=1,\ldots,n} |x_i|$ die Axiome der Norm erfüllt.

(b) Sei $A := \{x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < 1\}$. Bestimme die Mengen $H(A)$, $H(\mathcal{C}A)$ und ∂A.