Abteilung: Analysis
Prof. Dr. Friedmar Schulz
Übungsleiter: Jens Dittrich

Übungen zur Analysis II - Blatt 2

Abgabe: 02. November, 12:00 Uhr vor der Übung

Name: **Vorname:** **Tut.: Mo: □, Di: □, Mi: □**

Aufgabe	1	2	3	4	5	Summe
Soll	3	4	3	4	6	20
Ist						

Bis auf solche Fakten, die aus dem Vorlesungsbetrieb bekannt sind, müssen alle verwendeten Aussagen gut formuliert und bewiesen werden. Der Lösungsweg muss deutlich erkennbar sein.

1. Zeige für das System $\mathcal{F} = \{F \subset \mathbb{R}^n \,|\, F \text{ abgeschlossen }\}$ die folgenden Eigenschaften (Satz 1.3.9):

   (a) $\emptyset, \mathbb{R}^n \in \mathcal{F}$, d.h. die leere Menge und der gesamte Raum sind abgeschlossen.

   (b) $\mathcal{F}' \subset \mathcal{F} \;\Rightarrow\; \bigcap_{F \in \mathcal{F}'} F \in \mathcal{F}$, d.h. der Durchschnitt beliebig vieler abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen.

   (c) $\mathcal{F}' \subset \mathcal{F}$ endlich $\;\Rightarrow\; \bigcup_{F \in \mathcal{F}'} F \in \mathcal{F}$, d.h. die Vereinigung endlich vieler abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen.

2. Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ eine Punktmenge. Zeige die folgenden Aussagen (Lemma 1.3.10):

   (a) $\mathring{A} = \bigcup \{O \,|\, O \subset A,\, O \text{ offen }\}$, d.h. $\mathring{A}$ ist die größte offene Menge, die in A enthalten ist.

   (b) $\overline{A} = \bigcap \{F \,|\, F \supset A,\, F \text{ abgeschlossen }\}$, d.h. $\overline{A}$ ist die kleinste abgeschlossene Menge, die A umfaßt.

   (c) $\overline{A} = \mathring{A} \dot\cup \partial A$ mit der disjunkten Vereinigung $\dot\cup$.

   (d) $\partial A = \overline{A} \setminus \mathring{A}$.

3. Gegeben sei die Menge

$$M := \left\{ x \in \mathbb{R} \,|\, x = \frac{1}{m} + \frac{1}{n},\, m, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

   (a) Zeige, dass M weder offen noch abgeschlossen ist.

   (b) Bestimmte alle Häufungspunkte von M.

Bitte wenden!

4. (a) Ist $\emptyset \subset \mathbb{R}^n$ eine kompakte Menge? Beweise oder widerlege dazu die Definition (topologisch) kompakt.

   (b) Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine in $\mathbb{R}^n$ konvergente Folge mit $x := \lim_{n\to\infty} x_n$. Zeige, dass dann die Menge
$$X = \{x, x_1, x_2, \dots\}$$
kompakt ist, indem man direkt die Definition (topologisch) kompakt zeigt.

5. (a) Zeige, dass die Funktion $d : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_0^+$ definiert durch
$$d(x,y) := \begin{cases} 0 & \text{für} \quad x = y \\ 1 & \text{für} \quad x \neq y \end{cases}$$
den Axiomen der Metrik genügt. Wir definieren nun einen Umgebungsbegriff
$$U_\varepsilon(x) := \{y \in \mathbb{R}^n \,|\, d(x,y) < \varepsilon\}\,.$$

   (b) Zeige, mit dem Umgebungsbegriff aus Teilaufgabe a) ist jede Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ sowohl offen als auch (topologisch) abgeschlossen. (Hinweis: Die Resultate aus den Abschnitten 1.3 und 1.4 sind hier, wie in den folgenden Teilaufgaben, nicht ohne weiteres anwendbar, da wir einen anderen Umgebungsbegriff verwenden! Weise daher direkt Definition 1.3.1 nach.)

   (c) Zeige, dass mit dem Umgebungsbegriff aus Teilaufgabe a) jede unendliche Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ zwar beschränkt und (topologisch) abgeschlossen, aber nicht (topologisch) kompakt. Dabei heißt M beschränkt, wenn es eine Konstante $C > 0$ gibt mit $d(x,0) \leq C$ für alle $x \in M$. (Hinweis: Finde ein Gegenbeispiel zu Definition 1.4.12.)

   (d) Charakterisiere mit dem Umgebungsbegriff aus Teilaufgabe a) die (topologisch) kompakten Mengen. (Hinweis: Beachte wieder Definition 1.4.12.)