Abteilung: Analysis
Prof. Dr. Friedmar Schulz
Übungsleiter: Jens Dittrich

Übungen zur Analysis II - Blatt 3

Abgabe: 09. November, 12:00 Uhr vor der Übung

Name: **Vorname:** **Tut.: Mo: □, Di: □, Mi: □**

Aufgabe	1	2	3	4	Summe
Soll	6	5	4	2	17
Ist					

Bis auf solche Fakten, die aus dem Vorlesungsbetrieb bekannt sind, müssen alle verwendeten Aussagen gut formuliert und bewiesen werden. Der Lösungsweg muss deutlich erkennbar sein.

1. Wir untersuchen die Funktion $f(x,y) = x^3+y^3-3xy$ definiert für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Bearbeite dazu die folgenden Aufgaben:

   (a) Untersuche f auf Stetigkeit für alle $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$.

   (b) Bestimme zu $c \in \mathbb{R}$ die Schnittmengen $S_c := G_f \cap \{y = c\}$ und skizziere die Schnitte S_0, S_1 und S_{-1}.

   (c) Bestimme die Niveaumenge Γ_0 mit der folgenden Methode:

      i. Fasse die Niveaumenge als Bild der Abbildung $(x,y) = (x(t), y(t)) : [0,T] \to \mathbb{R}^2$ auf.

      ii. Führe geeignete Koordinaten, in diesem Fall Polarkoordinaten ein: $(x,y) = (x(t),y(t)) = r(t)(\cos(t), \sin(t))$ für $t \in \mathbb{R}$.

      iii. Bestimme die Funktion $r(t)$ aus der Bedingung an die Niveaumenge Γ_0 und setze wieder (x,y) gemäß ii).

      iv. Gib das Bild der so bestimmten Abbildung an.

   (d) Skizziere Γ_0.

2. Wir betrachten in dieser Aufgabe eine symmetrische, positiv-definite Matrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ und eine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definiert durch $f(x) = A \circ x$. Bearbeite die folgenden Aufgaben:

   (a) Untersuche f auf Stetigkeit für alle $x_0 = (x_0^1, x_0^2)^T \in \mathbb{R}^2$.

   (b) Sei $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Bestimme das Bild von A unter einem orthonormalen Koordinatennetz und unter einem Polarkoordinatennetz. Skizziere in beiden Fällen das Bild der Koordinatennetze unter A.

Bitte wenden!

3. Seien $D \subset \mathbb{R}^n$, $E \subset \mathbb{R}^k$ und $f : D \to \mathbb{R}^k$, $g : E \to \mathbb{R}^m$ Abbildungen. Seien weiter $a \in H(D)$ und $b \in H(E)$ und es existieren die Grenzwerte $\lim_{x\to a} f(x)$, $\lim_{y\to b} g(y)$ und $\lim_{x\to a} f(x) = b$.

   (a) Zeige unter Verwendung der Definition 2.2.1: Gilt zusätzlich noch $\lim_{y\to b} g(y) = g(b)$, so existiert $\lim_{x\to a} g \circ f(x) = \lim_{y\to b} g(y)$.

   (b) Zeige unter Verwendung der Definition 2.2.1: Gilt zusätzlich noch $f(x) \neq b$ für $x \in U_\delta(a) \setminus \{a\}$, so existiert $\lim_{x\to a} g \circ f(x) = \lim_{y\to b} g(y)$.

4. Zeige, an Hand eines Gegenbeispiels, dass nicht auf beide Zusatzvoraussetzung aus Aufgaben 3) gleichzeitig verzichtet werden kann.