Abteilung: Analysis
Prof. Dr. Friedmar Schulz
Übungsleiter: Jens Dittrich

Übungen zur Analysis II - Blatt 4
Abgabe: 16. November, 12:00 Uhr vor der Übung

Name: **Vorname:** **Tut.: Mo: □, Di: □, Mi: □**

Aufgabe	1	2	3	4	5	Summe
Soll	4	4	3	5	4	20
Ist						

Bis auf solche Fakten, die aus dem Vorlesungsbetrieb bekannt sind, müssen alle verwendeten Aussagen gut formuliert und bewiesen werden. Der Lösungsweg muss deutlich erkennbar sein.

1. Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion auf einer Punktmenge $D \subset \mathbb{R}^n$ und $a \in H(D)$. Dann heißt f im Punkt a **halbstetig nach oben** bzw. **unten**, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt mit

$$f(x) < f(a) + \varepsilon \quad \text{bzw.} \quad f(x) > f(a) - \varepsilon \quad \text{für alle} \quad x \in D : |x - a| < \delta.$$

   (a) Zeige, die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ ist genau dann stetig in $a \in H(D)$, wenn sie in diesem Punkt gleichzeitig halbstetig nach oben und nach unten ist.

   (b) Gib ein Beispiel einer Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ an, welche im Punkt $a \in H(D)$ nicht stetig, wohl aber im Punkt $a \in H(D)$ halbstetig nach oben oder unten ist. Skizziere diese Funktion.

2. Zu $y_0 \in \mathbb{R}$ betrachten wir die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x, y) := \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + (y - y_0)^2$$

und die Menge $A := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,:\, x = y^2,\ -1 \leq y \leq 1 \right\}$.

   (a) Skizziere A, und Niveaumengen Γ_c von f zu $c = 1, 4, 9$ und $y_0 = \frac{3}{2}$.

   (b) Zu beliebigem $y_0 \in \mathbb{R}$ sei $g : A \to \mathbb{R}$ die Einschränkung von f auf A, d.h.

$$g(x, y) := \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + (y - y_0)^2, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in A.$$

   Zeige, dass g auf A ein Minimum und ein Maximum annimmt. Bestimme alle Stellen $(x^-, y^-)^T \in A$ und $(x^+, y^+)^T \in A$, an denen das Minimum und das Maximum angenommen wird.

Bitte wenden!

3. Wir definieren die Menge $B_1 \subset \mathbb{R}^2$ durch $B_1 := (0,4) \times (0,3)$ und die Menge $B_2 \subset \mathbb{R}^2$ durch $B_2 = [0,3] \times [1,3]$.

   (a) Skizziere die Menge $A := B_1 \setminus B_2$.

   (b) Seien $a = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)^T \in A$ und $b = \left(\frac{7}{2}, \frac{5}{2}\right)^T \in A$ gegeben. Konstruiere eine stetige Abbildung $\gamma : [0,1] \to A$ mit $\gamma(0) = a$ und $\gamma(1) = b$.

4. Sei V der Vektorraum der auf einer kompakten Menge $K \subset \mathbb{R}^n$ stetigen Abbildungen $f : K \to \mathbb{R}^m$.

   (a) Zeige, dass dann die Funktion $\|\cdot\|_\infty : V \to \mathbb{R}_0^+$ definiert durch

   $$\|f\|_\infty := \sup_{x \in D} |f(x)| \quad f \in V$$

   eine Norm auf V ist.

   (b) Zeige direkt mit Definition 2.3.1: Wenn $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine gleichmäßig gegen f konvergente Folge mit $f_k \in V$ für alle $k \in \mathbb{N}$ ist, dann folgt $f \in V$.

   (c) Zeige: Wenn für eine Folge $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $f_k \in V$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und eine Funktion $f \in V$

   $$\lim_{k\to\infty} \|f_k - f\|_\infty = 0$$

   gilt, genau dann konvergiert die Folge $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen f. (Hinweis: Man vergleiche mit Lemma 2.6.2.)

5. Beweise die folgende Verallgemeinerung des Satzes von Weierstraß (2.4.5): Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt und $f : K \to \mathbb{R}$ eine für alle $x \in K$ nach unten halbstetige Funktion. Dann gibt es ein $x^- \in K$ mit

   $$f(x^-) = \inf_{x\in K} f(x) = \min_{x\in K} f(x).$$

   Bemerkung: Eine analoge Aussage gilt für nach oben halbstetige Funktionen und ihre Suprema. (Hinweis: Führe den Beweis von Satz 2.4.5 in dieser Situation noch einmal. Ersetze dabei die Aussage von Satz 2.4.4 durch Beschränktheit nach unten.)