Abteilung: Analysis
Prof. Dr. Friedmar Schulz
Übungsleiter: Jens Dittrich

Übungen zur Analysis II - Blatt 5
Abgabe: 23. November, 12:00 Uhr vor der Übung

Name: **Vorname:** **Tut.: Mo: □, Di: □, Mi: □**

Aufgabe	1	2	3	4	5	Summe
Soll	6	2	4	3	5	20
Ist						

Bis auf solche Fakten, die aus dem Vorlesungsbetrieb bekannt sind, müssen alle verwendeten Aussagen gut formuliert und bewiesen werden. Der Lösungsweg muss deutlich erkennbar sein.

1. Gegeben seien die Funktion
$$f = f(x_1, x_2) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$
definiert durch $f(x_1, x_2) = x_1^3 + x_2^3 - 3x_1x_2$ für $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ und die Abbildung
$$g = (g_1(t), g_2(t)) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$$
definiert durch $g(t) = (\cos t, \sin t)$ für $t \in \mathbb{R}$. Bearbeite die folgenden Aufgaben.
   (a) Zeige, dass f in der Klasse C^2 enthalten ist. Bestimme die Ableitungen
   $$D^{(1,1)}f(x_1, x_2) \qquad \text{und} \qquad D^{(2,0)}f(x_1, x_2)$$
   gemäß Definition 3.2.5.
   (b) Zeige unter Anwendung der Kettenregel 3.1.6, dass die Funktion $h = f \circ g$ stetig differenzierbar in $\mathbb{R}$ ist und berechne die Ableitung.
   (c) Berechne die Ableitung der Funktion h direkt, indem man die Ableitung des Ausdrucks
   $$h(t) = \cos^3 t + \sin^3 t - 3\cos t \sin t$$
   für $t \in \mathbb{R}$ berechnet.

2. Beweise den Satz von Schwarz in n Veränderlichen: Es sei $f = f(x_1, \ldots, x_n) : U \to \mathbb{R}$ eine Funktion, deren partielle Ableitungen f_{x_i}, f_{x_j} und $f_{x_ix_j}$ für $i \neq j$ existieren. Sei weiter $a = (a_1, \ldots, a_n) \in U$ eine Stelle, an der $f_{x_ix_j}$ stetig ist. Dann existiert auch $f_{x_jx_i}$ an der Stelle a und es gilt
$$f_{x_ix_j}(a) = f_{x_jx_i}(a).$$

Bitte wenden!

3. Zeige die folgenden Aussagen, hierbei ist $K \subset \mathbb{R}^n$ eine konvexe Menge. Wir nennen eine Menge $K \subset \mathbb{R}^n$ **konvex**, wenn für alle $x, y \in K$ und alle $\lambda \in [0,1]$ der Punkt $x + \lambda(y - x) \in K$ zu K gehört. Außerdem sagen wir, eine Funktion f genüge einer **Lipschitzbedingung** in K, wenn es ein $L > 0$ gibt mit

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y| \quad \text{für alle} \quad x, y \in K.$$

   (a) Bestimme und skizziere eine Menge, die nicht konvex ist.

   (b) Zeige: Wenn die Funktion $f : K \to \mathbb{R}$ zur Klasse C^1 gehört und die Größe

$$\sup_{\xi \in K} |\nabla f(\xi)|$$

   beschränkt ist, dann genügt f einer Lipschitzbedingung in K.

4. Es sei $f = f(x, y) : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ eine Funktion definiert durch:

$$f(x, y) = y \sin \frac{1}{x}.$$

   Existieren die beiden kontinuierlichen Doppellimites

$$\lim_{x \to 0} \lim_{y \to 0} f(x, y) \qquad \text{und} \qquad \lim_{y \to 0} \lim_{x \to 0} f(x, y)?$$

   (Beweis!) Bestimme die Werte im Falle der Existenz.

5. Betrachte die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x, y) := \begin{cases} \frac{x^3 y - x y^3}{x^2 + y^2} & \text{für} \quad (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{für} \quad (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

   Zeige die Existenz der gemischten zweiten partiellen Ableitungen auf $\mathbb{R}^2$ und bestimme deren Wert im Nullpunkt. Begründe, warum wir hier keinen Widerspruch zum Satz von Schwarz vorliegen haben?