Abteilung: Analysis
Prof. Dr. Friedmar Schulz
Übungsleiter: Jens Dittrich

Übungen zur Analysis II - Blatt 6
Abgabe: 30. November, 12:00 Uhr vor der Übung

Name: **Vorname:** **Tut.: Mo: □, Di: □, Mi: □**

Aufgabe	1	2	3	4	5	Summe
Soll	6	4	4	3	3	20
Ist						

Bis auf solche Fakten, die aus dem Vorlesungsbetrieb bekannt sind, müssen alle verwendeten Aussagen gut formuliert und bewiesen werden. Der Lösungsweg muss deutlich erkennbar sein.

1. Wir wollen uns mit Matrixnormen beschäftigen. Wir definieren zu einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ die Größe

$$\|A\| := \sup_{x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \frac{|A \circ x|}{|x|} = \inf \{C > 0 \,|\, |A \circ x| \leq C|x|\}\,.$$

Bearbeite die folgenden Aufgaben:

(a) Zeige zunächst $\sup_{x\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}} \frac{|A\circ x|}{|x|} = \inf \{C > 0 \,|\, |A \circ x| \leq C|x|\}$. Zeige weiter, dass für alle $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ gilt: $\|A\| < +\infty$.

(b) Zeige, die Funktion $\|\cdot\| : R^{n\times m} \to \mathbb{R}_0^+$ ist eine Norm auf dem angegebenen Raum.

(c) Die Abbildung $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ gegeben durch $f(x) := A \circ x$ ist gleichmäßig stetig im $\mathbb{R}^n$. Gib dazu zu jedem $\varepsilon > 0$ das entsprechende $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ gemäß Definition 2.4.1 an.

2. (a) Mit $U \subset \mathbb{R}^n$ sei $f : U \to \mathbb{R}$ eine in U total differenzierbare Funktion. Bestimme die Gleichung der Tangentialebene in Normalenform und in Punkt-Richtungsform.

(b) Nun sei $f(x, y) := x \exp(y^2 - x)$ für $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Zeige, dass f in jedem Punkt $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ total differenzierbar ist. Bestimme darüberhinaus die Gleichung der Tangentialebene in Normalenform und in Punkt-Richtungsform.

Bitte wenden!

3. Sei $g : S^1 \to \mathbb{R}$ eine Funktion auf der Kreislinie $S^1 := \{x \in \mathbb{R}^2 \,|\, |x| = 1\}$, welche darüberhinaus auch noch den Bedingungen $g(0,1) = 0 = g(1,0)$ und $g(-x) = -g(x)$ genügt. Wir definieren nun die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x) := \begin{cases} |x| g\left(\frac{x}{|x|}\right) & \text{für} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{für} \quad x = 0 \end{cases}$$

und lösen die folgenden Aufgaben:

   (a) Zu festem $x \in \mathbb{R}^2$ ist die Funktion $h_x = h_x(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $h_x(t) = f(tx)$ differenzierbar.

   (b) Wenn g nicht identisch verschwindet, so ist f nicht total differenzierbar in $(0,0)$.

4. Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x,y) := y^3 + 3xy^2$ für $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Bestimme die Taylorentwicklung bis zum Term zweiten Grades um den Entwicklungspunkt $a = (1,1)$ und gib Formeln für das Restglied an, mit denen die Werte $f(0,0)$ und $f(2,1)$ berechnet werden können.

5. Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine in I stetig differenzierbare Funktion. Betrachte zu einem Punkt $a \in I$ die Tangente an f in a und die Taylorentwicklung bis zum Term erster Ordnung im Punkt a. Formuliere in eigenen Worten, welcher Zusammenhang zwischen diesen beiden Dingen besteht. Gehe dabei insbesondere auf das Restglied der Taylorentwicklung ein.