Abteilung: Analysis
Prof. Dr. Friedmar Schulz
Übungsleiter: Jens Dittrich

Übungen zur Analysis II - Blatt 7
Abgabe: 07. Dezember, 12:00 Uhr vor der Übung

Name: **Vorname:** **Tut.: Mo: □, Di: □, Mi: □**

Aufgabe	1	2	3	4	5	Summe
Soll	3	4	6	4	3	20
Ist						

Bis auf solche Fakten, die aus dem Vorlesungsbetrieb bekannt sind, müssen alle verwendeten Aussagen gut formuliert und bewiesen werden. Der Lösungsweg muss deutlich erkennbar sein.

1. Seien $k, n \in \mathbb{N}$. Wir teilen k unterscheidbare Kugeln $K_1, \ldots, K_k$ auf n Urnen $U_1, \ldots, U_n$ auf, so dass sich α_j Kugeln in der Urne U_j für $j = 1, \ldots, n$ befinden. Zeige, dass es dann genau
$$\frac{k!}{\alpha_1! \ldots \alpha_n!}$$
Möglichkeiten dafür gibt.

2. Beweise die folgenden hinreichenden Bedingungen für die Definitheit von Matrizen. Dazu definieren wir zu $A = (a_{ij})_{i,j=1,\ldots,n}$ mit $a_{ij} = a_{ji}$ für $i, j = 1, \ldots, n$ die Größen.
$$M_k := \det \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \ldots & a_{kk} \end{pmatrix}, \quad k = 1, \ldots, n.$$
   (a) Wenn $M_k > 0$ für alle $k = 1, \ldots, n$ gilt, dann ist A positiv-definit.
   (b) Wenn $(-1)^k M_k > 0$ für alle $k = 1, \ldots, n$ gilt, dann ist A negativ-definit.
   (c) Wenn es $k^+, k^- \in \{1, \ldots, n\}$ gibt mit $a_{k^+k^+} > 0$ und $a_{k^-k^-} < 0$, dann ist A indefinit.

3. Gegeben sei die Funktion $f(x, y) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch
$$f(x, y) = \frac{x^3}{3} + y^2 x - 5x + \frac{y^3}{3} - 5y.$$
Bestimme alle lokalen Extremstellen von f. Gibt es globale Extremstellen? Begründung!

Bitte wenden!

4. Zu $n \in \mathbb{N}$ seien Punkte $(x_k, y_k) \in \mathbb{R}^2$ für $k = 1, \ldots, n$ mit der Bedingung

$$\text{es gibt } k_0, l_0 = 1, \ldots, n \text{ mit } x_{k_0} \neq x_{l_0}$$

gegeben. Bestimme die lineare Funktion $f(x) = ax + b$, für welche der Fehler

$$E(a,b) := \sum_{k=1}^{n} \left(f(x_k) - y_k\right)^2$$

minimal wird. Hinweis: Stelle die Zahlen a und b in Termen der x_k und y_k dar.

5. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge und die Funktion $f \in C^2(\Omega)$ erfülle

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} f(x) > 0 \quad x \in \Omega.$$

Zeige, dass dann f in keinem Punkt $x_0 \in \Omega$ ein lokales Maximum annimmt.