ulm university universität ulm

## Übungen zur Analysis II - Blatt 8

Abgabe: 14. Dezember, 12:00 Uhr vor der Übung

**Fakultät für Mathematik und Wirtschaftswissenschaften**
Institut für Analysis

**Prof. Dr. Friedmar Schulz**
friedmar.schulz@uni-ulm.de

**Dipl.-Math. Jens Dittrich**
jens.dittrich@uni-ulm.de

**Name:** **Vorname:**

| Aufgabe | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | Summe |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Soll | 6 | 3 | 2 | 6 | 3 | 20 |
| Ist | | | | | | |

Bis auf solche Fakten, die aus dem Vorlesungsbetrieb bekannt sind, müssen alle verwendeten Aussagen gut formuliert und bewiesen werden. Der Lösungsweg muss deutlich erkennbar sein.

1. Gegeben seien die folgenden Abbildungen oder Funktionen

$$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3,\quad f(x,y)=(x+y,x-y,xy),\qquad g:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2,\quad g(x,y,z)=(xyz,x^2+y^2+z^2),$$

$$h:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\quad h(x,y)=\begin{cases}\frac{xy^2}{x^2+y^2} & \text{für}\quad (x,y)\neq 0,\\ 0 & \text{für}\quad (x,y)=0,\end{cases}\qquad i:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2,\quad i(x)=(x,x).$$

   (a) Bestimme die Jacobimatrizen von $f$, $g$, $i$ und den Gradienten von $h$.

   (b) Bestimme die Jacobimatrizen von $f\circ g$, $g\circ f$ und den Gradienten von $h\circ i$.

   (c) Begründe, warum man für $D(h\circ i)$ die Kettenregel nicht verwenden kann.

2. Es seien $f,g:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ stetig differenzierbare Abbildungen.

   (a) Drücke den Gradienten der Abbildung $F:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ mit $F(x)=(f,g)(x)$ durch die Jacobimatrizen von $f$ und $g$ aus.

   (b) Drücke den Gradienten der Abbildung $G:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ mit $G(x)=|g(x)|$ durch die Jacobimatrix von $g$ aus.

3. Zeige: Ist $f:U\to\mathbb{R}^n$ mit $U\subset\mathbb{R}^n$ eine differenzierbare Abbildung und $F:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion mit $DF(y)\neq 0$ für alle $y\in\mathbb{R}^n$ und $F(f(x))\equiv\text{const}$ für alle $x\in U$, so gilt für alle $x\in U$ die Gleichung $\det(Df(x))=0$.Die Gradienten funktional abhängiger Funktionen $f_1,\dots,f_n$ sind also linear abhängig.

4. (a) Es sei $f:U\to\mathbb{R}^n$ eine stetig differenzierbare Abbildung, $U\subset\mathbb{R}^n$ ist konvex und es gelte

$$(Df(x)\circ h,h)>0\quad\forall x\in U\quad h\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}.$$

   Zeige, dann ist $f:U\to f(U)$ global invertierbar.

   (b) Es sei $f:U\to\mathbb{R}^n$ eine stetig differenzierbare Abbildung, $U\subset\mathbb{R}^n$ und es gelte

$$|f(x)-f(y)|\geq c|x-y|\quad\forall x,y\in U$$

   mit einer Konstanten $c>0$. Zeige, dass $\det(Df(x))\neq 0$ für alle $x\in U$ gilt und dass $f:U\to f(U)$ global invertierbar ist. Falls $U=\mathbb{R}^n$ gilt, so ist auch $f(U)=\mathbb{R}^n$. (Hinweis: Zeige, dass die nicht-leere Menge $f(\mathbb{R}^n)$ sowohl offen als auch abgeschlossen ist und wende dann ein Zusammenhangsargument an.)

5. Es sei $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ definiert durch $f(x,y)=(x+h(y),y+h(x))$, mit einer stetig differenzierbaren Funktion $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, für welche $|h'(t)|\leq q<1$ für alle $t\in\mathbb{R}$ gilt. Zeige, dass dann $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ bijektiv und $f^{-1}$ stetig differenzierbar ist.