ulm university universität ulm

Übungen zur Analysis II - Blatt 9
Abgabe: 21. Dezember, 12:00 Uhr vor der Übung

Fakultät für Mathematik und Wirtschaftswissenschaften
Institut für Analysis

Prof. Dr. Friedmar Schulz
friedmar.schulz@uni-ulm.de

Dipl.-Math. Jens Dittrich
jens.dittrich@uni-ulm.de

Name: **Vorname:**

Aufgabe	1	2	3	4	5	Summe
Soll	4	2	5	5	4	20
Ist						

Bis auf solche Fakten, die aus dem Vorlesungsbetrieb bekannt sind, müssen alle verwendeten Aussagen gut formuliert und bewiesen werden. Der Lösungsweg muss deutlich erkennbar sein.

1. Bearbeite die folgenden Aufgaben:
   (a) Zeige, die Gleichung $xe^y + ye^z + ze^x = 0$ ist in einer Umgebung der 0 eindeutig nach z auflösbar.
   (b) Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$. Durch die Gleichung $f(x, y) = 0$ wird eine Kurve im $\mathbb{R}^2$ definiert. In welchen Punkten kann die Gleichung *nicht* nach y aufgelöst werden? Berechne die Ableitung der Auflösungsfunktion $y = g(x)$ in Termen von x und y.
2. Zeige, dass die einfachen Nullstellen eines Polynoms $p(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$ differenzierbar von den Koeffizienten $(a_0, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ abhängen.
3. Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = x^2 - y^2 - 1$ und die Menge $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = 0\}$.
   (a) Zeige, dass es zu jedem Punkt von K eine Umgebung gibt, so dass K lokal in der Form $x = \psi(y)$ geschrieben werden kann.
   (b) Gib eine solche Darstellung in einer Umgebung des Punktes $(1, 0)$ an.
   (c) Untersuche, für welche Punkte von K es eine Umgebung gibt, so dass K lokal in der Form $y = \varphi(x)$ geschrieben werden kann.
   (d) Gib eine solche Darstellung in einer Umgebung des Punktes $(\sqrt{2}, -1)$ an.
4. Sei $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0\} \subset \mathbb{R}^2$ und $f : U \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x, y) = xy - \log x + \log y$.
   (a) Zeige: Ist $f(a, b) = 0$, so gibt es eine in einer Umgebung von a definierte Funktion φ, so dass $f(x, \varphi(x)) = 0$ gilt.
   (b) Berechne $\varphi'(x)$ als Funktion von von x und y.
   (c) Zeige: Es gibt genau einen Punkt $(a, b) \in U$ mit $f(a, b) = 0$, so dass die durch $f(a, b) = 0$ implizit definierte Funktion φ eine kritische Stelle bei a hat. (D.h. $\varphi'(a) = 0$)
   (d) Zeige, dass φ an dieser Stelle ein Maximum hat.
5. (a) Seien $m \in \mathbb{N}$, $r > 0$ und $n \in \mathbb{R}^m \setminus \{0\}$, finde alle Extremstellen der Funktion $g(x) = (n, x)$ auf der Sphäre $S_r^{m-1} := \{x \in \mathbb{R}^m : |x| = r\}$.
   (b) Finde die Punkte der Menge $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z^2 - xy = 1\}$, die dem Ursprung am nächsten liegen.