ulm university universität uulm

Übungen zur Analysis II - Blatt 10

Abgabe: 11. Januar, 12:00 Uhr vor der Übung

Fakultät für Mathematik und Wirtschaftswissenschaften
Institut für Analysis

Prof. Dr. Friedmar Schulz
friedmar.schulz@uni-ulm.de

Dipl.-Math. Jens Dittrich
jens.dittrich@uni-ulm.de

Name: **Vorname:**

Aufgabe	1	2	3	4	5	Summe
Soll	3	6	3	5	3	20
Ist						

Bis auf solche Fakten, die aus dem Vorlesungsbetrieb bekannt sind, müssen alle verwendeten Aussagen gut formuliert und bewiesen werden. Der Lösungsweg muss deutlich erkennbar sein.

1. Folgere den Satz über inverse Abbildungen aus dem Satz über implizite Funktionen.

2. Zeige den Satz über die Hauptachsentransformation: Sei A eine symmetrische $n \times n$-Matrix. Dann gibt es n reelle Eigenwerte λ_i und zu jedem Eigenwert einen (normierten) Eigenvektor v_i so dass $(v_i, v_j) = \delta_{ij}$ gilt. Weiter schreibt sich
$$Ax = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (v_i, x) v_i, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$
Benutze dabei folgende Methode:
   - Zeige zunächst die Implikation: Gilt $(x, Ax) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$, dann folgt $A = 0$.
   - Spalte von einer symmetrischen Matrix den betragsgrößten Eigenwert λ ab, indem man ein geeignetes Variationsproblem betrachtet (vgl. Satz 3.5.8 oder 4.4.3).
   - Betrachte mit dem normierten Eigenvektor v zum Eigenwert λ die Abbildung $Bx = Ax - \lambda(v, x)v$. Zeige, dass die Voraussetzungen der obigen Punkte erfüllt sind und spalte nun sukzessive betragsgrößte Eigenwerte ab.
   - Begründe, warum das Verfahren endlich ist, warum $(v_i, v_j) = \delta_{ij}$ gilt und warum wir alle Eigenwerte ermittelt haben.

3. Sei M ein vollständiger metrischer Raum (d.h. jede Cauchyfolge konvergiert) mit der Metrik $d : M \times M \to \mathbb{R}_0^+$. Sei weiter $f : M \to M$ eine kontrahierende Selbstabbildung von M, d.h. es gilt $d(f(x), f(y)) \leq q d(x, y)$ für alle $x, y \in M$ mit einem $0 \leq q < 1$. Zeige, dann hat das Fixpunktproblem $x = f(x)$ genau eine Lösung in M. (Hinweis: Zeige zunächst die Cauchyfolgeneigenschaft der rekursiv definierten Folge: $x^0 \in M$, $x^k = f(x^{k-1})$ für $k = 1, 2, \ldots$.)

4. Seien π_1 und π_2 Partitionen eines Intervalls $I \subset \mathbb{R}^n$. Finde eine gemeinsame Verfeinerung π' und gib alle n-dimensionalen Teilintervalle von π' an. Zeige weiter für beschränkte Funktionen $f : I \to \mathbb{R}$ die Ungleichungen
$$S(\pi', f) \leq S(\pi_i, f) \quad i = 1, 2.$$
Dabei nennen wir eine Zerlegung π' Verfeinerung einer anderen Zerlegung π, wenn die Gitterpunkte von π auch Gitterpunkte von π' sind.

5. Beweise Lemma 5.2.2. mit den Bezeichnungen aus Definition 5.2.1.: Ist $f : I \to \mathbb{R}$ beschränkt, so ist
$$\omega(I, f) = \sup_I f - \inf_I f$$
und
$$\omega(\pi, f) = S(\pi, f) - s(\pi, f).$$