ulm university universität uulm

Übungen zur Analysis II - Blatt 11
Abgabe: 18. Januar, 12:00 Uhr vor der Übung

Fakultät für Mathematik und Wirtschaftswissenschaften
Institut für Analysis

Prof. Dr. Friedmar Schulz
friedmar.schulz@uni-ulm.de

Dipl.-Math. Jens Dittrich
jens.dittrich@uni-ulm.de

Name: **Vorname:**

Aufgabe	1	2	3	4	5	Summe
Soll	3	3	4	4	6	20
Ist						

Bis auf solche Fakten, die aus dem Vorlesungsbetrieb bekannt sind, müssen alle verwendeten Aussagen gut formuliert und bewiesen werden. Der Lösungsweg muss deutlich erkennbar sein.

1. Beweise oder widerlege dass die folgenden Mengen Jordansche Nullmengen sind:

   (a) $[0,1] \cap \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, (b) $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\} \subset \mathbb{R}^n$, (c) $H \cap I \subset \mathbb{R}^n$.

   Hierbei bezeichnet in der Aufgabe c) I ein kompaktes Intervall und H eine Hyperebene.

2. Sei $J \subset \mathbb{R}^n$ ein Jordanscher Bereich. Seien weiter $f, g : J \to \mathbb{R}$ und $p : J \to [0, \infty)$ auf J stetige Funktionen. Zeige die folgenden Gleichungen oder Ungleichungen:

   (a) $\int_J \alpha f(x) + \beta g(x)\, dx = \alpha \int_J f(x)\, dx + \beta \int_J g(x)\, dx,$ für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,
   (b) $\left|\int_J f(x)\, dx\right| \leq \int_J |f(x)|\, dx$,
   (c) $\int_J f(x)p(x)\, dx = \mu \int_J p(x)\, dx$ mit einem $\mu \in [\inf_J f, \sup_J f]$.

   In anderen Worten: Beweise Bemerkung 5.5.8.

3. Zeige die Existenz der uneigentlichen Integrale

   $$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, dx \qquad \text{und} \qquad \int_{\mathbb{R}^n} g(x)\, dx$$

   mit den in a) und b) erklärten Funktionen f und g.

   (a) Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit kompaktem Träger, d.h. die Menge $\operatorname{supp}(f) := \overline{\{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \neq 0\}}$ ist kompakt.
   (b) Sei $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine Funktion, welche der Eigenschaft $\int_{M_R} |g(x)|\, dx \leq \frac{1}{(R+1)^\alpha}$ mit einem festen $\alpha > 1$ für alle $R \geq 0$ in $M_R = \{x \in \mathbb{R}^n \mid R \leq |x| \leq R+1\}$ genügt.

4. Untersuche die folgenden uneigentlichen Integrale zum Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$ auf Konvergenz:

   $$\text{(a)} \int_1^\infty x^2 2^{-x}\, dx, \quad \text{(b)} \int_0^1 x^\alpha\, dx, \quad \text{(c)} \int_1^\infty x^\alpha\, dx, \quad \text{(d)} \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

   Bestimme im Falle der Existenz die Werte der Integrale.

5. Untersuche die folgenden Funktionenfolgen auf dem angegebenen Definitionsbereichen auf gleichmäßige Konvergenz

   $$\text{(a)}\ f_k(x) = \frac{k}{k^2 + x^2},\ D = \mathbb{R}, \quad \text{(b)}\ f_k(x) = ke^{-kx},\ D = (0, \infty), \quad \text{(c)}\ f_k(x) = \frac{\sin(kx)}{k},\ D = [0, \pi].$$

   Bestimme den Grenzwert: $\displaystyle\lim_{k\to\infty} \int_D f_k(x)\, dx.$