ulm university universität uulm

Übungen zur Analysis II - Blatt 12
Abgabe: 25. Januar, 12:00 Uhr vor der Übung

Fakultät für Mathematik und Wirtschaftswissenschaften
Institut für Analysis

Prof. Dr. Friedmar Schulz
friedmar.schulz@uni-ulm.de

Dipl.-Math. Jens Dittrich
jens.dittrich@uni-ulm.de

Name: **Vorname:**

Aufgabe	1	2	3	4	5	Summe
Soll	3	6	2	3	6	20
Ist						

Bis auf solche Fakten, die aus dem Vorlesungsbetrieb bekannt sind, müssen alle verwendeten Aussagen gut formuliert und bewiesen werden. Der Lösungsweg muss deutlich erkennbar sein.

1. Gegeben sei die Funktion
$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x-y}{(x+y)^3} & \text{für} \quad x+y \neq 0 \\ 0 & \text{für} \quad x+y = 0. \end{cases}$$
Berechne die beiden iterierten Integrale:

   (a) $\displaystyle\int_{y=0}^{1}\int_{x=0}^{1} f(x,y)\,dx\,dy,$ (b) $\displaystyle\int_{x=0}^{1}\int_{y=0}^{1} f(x,y)\,dy\,dx.$

   (c) Begründe, warum wir hier keinen Widerspruch zum Satz von Fubini vorliegen haben.

2. Betrachte die Funktion $f(x,y) = y\exp\left(-(1+x^2)y^2\right)$ für $x,y \geq 0$. Bearbeite dazu die folgenden Aufgaben:

   (a) Zeige die Existenz des uneigentlichen Integrals $\int_{\mathbb{R}_0^+} e^{-t^2}\,dt.$

   (b) Untersuche die Funktionfolge $h_k(x) = \int_0^k f(x,y)\,dy$ auf Stetigkeit, gleichmäßige Konvergenz in ihrem Definitionsbereich und die Existenz einer integrierbaren Majorante.

   (c) Bestimme nun den Wert des Integrals aus Teilaufgabe (a), indem ein geeignetes Doppelintergral von $f(x,y)$ betrachtet wird.

3. Seien $r > 0$ und $\Delta_r = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \; : \; x,y \geq 0,\; x+y \leq r\right\}$ gegeben. Berechne den Wert des Integrals
$$\iint_{\Delta_r} x^2 + y^2\,dx\,dy.$$

4. Untersuche die Funktion $f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = \int_0^1 \frac{\sin(xy)}{y}\,dy$ auf (stetige) Differenzierbarkeit und bestimme ihre Ableitung in integralfreier Form.

5. Bearbeite die folgenden Aufgaben:

   (a) Zeige, dass zu $\epsilon > 0$ die Funktionen $\psi_\epsilon(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $\psi_\epsilon(x) = \frac{1}{\pi}\frac{\epsilon}{\epsilon^2+x^2}$ eine Dirac-Schar bilden.

   (b) Sei jetzt f eine auf $\mathbb{R}$ stetige Funktion, g eine auf $\mathbb{R}$ stetig-differenzierbare Funktion mit endlich vielen Nullstellen x_k mit $k = 1,\ldots,p$. Dabei gelte für jede dieser Nullstellen die Bedingung $g'(x_k) \neq 0$. Sei weiter ρ_ϵ die Dirac-Schar des Standard-Mollifiers. Zeige
$$\lim_{\epsilon\to 0}\int_{\mathbb{R}} \rho_\epsilon(g(x))f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{p}\frac{f(x_k)}{|g'(x_k)|}.$$