ulm university universität ulm

Übungen zur Analysis II - Blatt 13

Abgabe: 1. Februar, 12:00 Uhr vor der Übung

Fakultät für Mathematik und Wirtschaftswissenschaften
Institut für Analysis

Prof. Dr. Friedmar Schulz
friedmar.schulz@uni-ulm.de

Dipl.-Math. Jens Dittrich
jens.dittrich@uni-ulm.de

Name: **Vorname:**

Aufgabe	1	2	3	4	5	Summe
Soll	3	3	5	5	4	20
Ist						

Bis auf solche Fakten, die aus dem Vorlesungsbetrieb bekannt sind, müssen alle verwendeten Aussagen gut formuliert und bewiesen werden. Der Lösungsweg muss deutlich erkennbar sein.

1. Sei $K = [0,2] \times [0,2]$ ein Quadrat. Seien weiter $U_{1,r} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x + y < r\}$, $r \leq 3$ und $U_{2,s} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x + y > s\}$, $s \geq 1$ eine Überdeckung von K. Konstruiere mit Hilfe von Satz 6.3.3 explizit eine der Überdeckung $\{U_{1,r}, U_{2,s}, r \leq 3, s \geq 1\}$ untergeordnete Partition der Eins $\{\psi_1, \dots, \psi_N\}$. Drücke die ψ_i für $i = 1, \dots, N$ durch Integrale elementarer Funktionen aus.

2. Sei J eine Indexmenge und die Mengen $U_i = B_{\epsilon_i}(x_i)$ mit $\epsilon_i > 0$ für $i \in J$ haben die Eigenschaften:

   i) $\mathbb{R}^n = \bigcup_{i \in J} U_i$, ii) Zu jedem $x \in \mathbb{R}^n$ gibt es $\epsilon > 0$ und höchstens endlich viele $i \in J$ mit $U_i \cap B_\epsilon(x) \neq \emptyset$.

   (a) Zeige, dass es C^∞-Funktionen gibt mit der Eigenschaft: $\psi_i : \mathbb{R}^n \to [0,\infty)$, $\operatorname{supp}(\psi_i) = \overline{U_i}$ für alle $i \in J$ und $\sum_{i \in J} \psi_i(x) \equiv 1$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$.

   (b) Zeige, dass es zu jeder Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine Familie von Funktionen $f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $i \in J$ gibt mit $\operatorname{supp}(f_i) \subset \overline{U_i}$ für alle $i \in J$ und $\sum_{i \in J} f_i(x) \equiv f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$.

3. Seien $D = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1, x_2 > 0, x_1 + x_2 < 1\}$ und $R = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2; 0 < x_1 + x_2 < 2, 0 < x_1 - x_2 < 2\}$.

   (a) Skizziere D und R.

   (b) Bestimme $\iint_D \exp\left(\frac{x_2}{x_1 + x_2}\right) dx$ durch Verwendung der Transformation $y(x) = \left(x_1 + x_2, \frac{x_2}{x_1 + x_2}\right)$.

   (c) Bestimme $\iint_R x_1^2 - x_2^2 \, dx$ mit Hilfe einer geeigneten Transformation von R auf $(0,1) \times (0,1)$.

4. Sei $y : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definiert durch $y(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, x_2 - x_1^2)$ und sei D wie in Aufgabe 3 definiert und $T = y(D)$

   (a) Skizziere T.

   (b) Bestimme den Flächeninhalt von T durch Auswertung der Integrale $\iint_T dy$ und $\iint_D |J_y(x)| \, dx$.

   (c) Bestimme den Wert des Integrals $\iint_T \frac{1}{\sqrt{1 + 4y_1 - 4y_2}} \, dy$.

5. (a) Es sei $\delta > \epsilon > 0$. Zeige $\iiint_{B_\delta(0) \setminus B_\epsilon(0)} \frac{dx\,dy\,dz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} = 4\pi \log \frac{\delta}{\epsilon}$.

   (b) Zeige die Existenz von $\int_{\mathbb{R}^n} (1 + |x|^2)^{-\alpha} \, dx$ für $\alpha > \frac{n}{2}$.