ulm university universität uulm

Fakultät für Mathematik und Wirtschaftswissenschaften
Institut für Analysis

Prof. Dr. Friedmar Schulz
friedmar.schulz@uni-ulm.de

Dipl.-Math. Jens Dittrich
jens.dittrich@uni-ulm.de

Übungen zur Analysis II - Blatt 14

Abgabe: 8. Februar, 12:00 Uhr vor der Übung

Name: **Vorname:**

Aufgabe	1	2	3	4	5	Summe
Soll	3	3	5	4	5	20
Ist						

Bis auf solche Fakten, die aus dem Vorlesungsbetrieb bekannt sind, müssen alle verwendeten Aussagen gut formuliert und bewiesen werden. Der Lösungsweg muss deutlich erkennbar sein.

1. Zeige die folgende Verallgemeinerung der Transformationsformel: Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine beschränkte offene Menge und $y : U \to \mathbb{R}^n \in C^1(U)$ eine Abbildung. Sei weiter $N = \{x \in U : J_y(x) = 0\}$ eine Jordansche Nullmenge und die Abbildung y sei als Abbildung eingeschränkt von $U \setminus \overline{N}$ auf $y(U \setminus \overline{N})$ ein Diffeomorphismus. Außerdem sei $f \in C^0(y(U))$ mit $\int_{y(U)} |f(y)|\, dy < \infty$ gegeben. Dann folgt
$$\int_U |f(y(x))J_y(x)|\, dx < \infty \quad \text{und es gilt} \quad \int_U f(x)|J_y(x)|\, dx = \int_{y(U)} f(y)\, dy.$$

2. Skizziere die folgenden Mengen und beweise, dass es sich nicht um 1-dimensionale Untermannigfaltigkeiten handelt.
   (a) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 0\}$,
   (b) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1, z^2 - xy = 1\}$,
   (c) $\{(t,t^2) \in \mathbb{R}^2 : t \geq 0\} \cup \{(t,-t^2) \in \mathbb{R}^2 : t \geq 0\}$.

3. Sei $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}$ die Einheitssphäre.
   (a) Zeige, dass sich S^{n-1} lokal als Urbild einer Funktion gemäß Definition 8.1.1 schreiben läßt.
   (b) Stelle S^{n-1} lokal als Graph einer stetig differenzierbaren Funktion dar.
   (c) Parametrisiere S^{n-1} für $n = 2, 3$ durch sphärische Koordinaten.
   (d) Sei $N = e_1$ der Nordpol von S^{n-1}. Für einen beliebigen Punkt $p \in S^{n-1} \setminus \{N\}$ gibt es genau eine Gerade durch den Nordpol und p. Diese schneidet in genau einem Punkt die Ebene $E = \{u \in \mathbb{R}^n \mid (u, e_1) = 0\}$. Zeige, die so definierte Abbildung $\varphi : S^{n-1} \to E$ ist bijektiv, man nennt sie auch stereographische Projektion. Gib den Punkt $\varphi(p)$ in Termen der karthesischen Koordinaten von $p \in S^{n-1} \setminus \{N\}$ an und umgekehrt.

4. (a) Zeige, dass die beiden Vektorfelder $V(x,y,z) = (-y, x, 0)$ und $W(x,y,z) = (-zx, -zy, 1 - z^2)$ tangential an der Sphäre S^{n-1} sind (d.h. $V(a), W(a) \in T_aS^{n-1}$ für alle $a \in S^{n-1}$). Skizziere sie.
   (b) Berechne die Koeffizienten beider Vektorfelder bezüglich sphärischer Korrdinaten.
   (c) Berechne die Koeffizienten beider Vektorfelder bezüglich der durch stereographische Projektion erhaltenen Koordinaten, außer in N.

5. Seien $r, \rho > 0$ und die Abbildung $X = X(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ mit $X(t) = (r\cos t, r\sin t, \rho t)$ gegeben.
   (a) Zeige, dass die Menge $X(\mathbb{R})$ eine 1-dimensionale reguläre Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$ ist.
   (b) Bestimme in jedem Punkt $t_0 \in \mathbb{R}$ eine Tangente $T(t_0)$ und zwei Normalen $N_1(t_0)$, $N_2(t_0)$ so dass die Abbildungen $T, N_1, N_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ stetig differenzierbar und punktweise linear unabhängig sind.
   (c) Gib explizit eine Parametertransformation $t = t(s) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ an, so dass $X(t(s))$ der Bedingung $\left|\frac{d}{ds}X(t(s))\right| = 1$ genügt.