ulm university universität ulm

Übungen zur Analysis II - Zusatzblatt
Abgabe: 15. Februar, 12:00 Uhr vor der Übung

Fakultät für Mathematik und Wirtschaftswissenschaften
Institut für Analysis

Prof. Dr. Friedmar Schulz
friedmar.schulz@uni-ulm.de

Dipl.-Math. Jens Dittrich
jens.dittrich@uni-ulm.de

Name: **Vorname:**

Aufgabe	1	2	3	4	5	Summe
Soll	4	4	4	3	5	20
Ist						

Bis auf solche Fakten, die aus dem Vorlesungsbetrieb bekannt sind, müssen alle verwendeten Aussagen gut formuliert und bewiesen werden. Der Lösungsweg muss deutlich erkennbar sein.

1. Sei $X = X(t) : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}^3 \in C^3([t_0, t_1], \mathbb{R}^3)$ eine reguläre parametrische Kurve auf (t_0, t_1).
   (a) Zeige: Für die Länge von X gilt: $L(X) = \displaystyle\int_{t_0}^{t_1} \left|\frac{d}{dt}X(t)\right| \, dt$.
   (b) Zeige, dass es immer eine Parametertransformation $t = t(s) : [s_0, s_1] \to \mathbb{R} \in C^3([s_0, s_1], [t_0, t_1])$ gibt, so dass für $\overline{X} = X \circ t : [s_0, s_1] \to \mathbb{R}^3$ gilt: $\left|\frac{d}{ds}\overline{X}(s)\right| \equiv 1$.

2. (a) In der Situation der vorherigen Aufgabe: Zeige die Gleichungen unter der Voraussetzung $\overline{X}'' \neq 0$
$$(\overline{X}''(s))^2 = \left.\frac{(\dot{X}(t) \times \ddot{X}(t))^2}{((\dot{X}(t))^2)^3}\right|_{t=t(s)} \qquad \text{und} \qquad \frac{(\overline{X}'(s), \overline{X}''(s), \overline{X}'''(s))}{(\overline{X}''(s))^2} = \left.\frac{(\dot{X}(t), \ddot{X}(t), \dddot{X}(t))}{(\dot{X}(t) \times \ddot{X}(t))^2}\right|_{t=t(s)}$$
   für alle $s \in [s_0, s_1]$. Dabei bezeichnet der Strich die Ableitungen nach s und der Punkt die Ableitungen nach t.
   (b) Gib am Beispiel der Kurve von Aufgabe 5, Blatt 14 eine Interpretation der Größen $(\overline{X}''(s))^2$ und $(\overline{X}'(s), \overline{X}''(s), \overline{X}'''(s))(\overline{X}''(s))^{-2}$.

3. Sei $Y = Y(s) = Y(t_1, \dots, t_d) : T \to \mathbb{R}^n \in C^3(T)$ eine Immersion und $t = (t_1(\tau), \dots . t_d(\tau)) : [\tau_0, \tau_1] \to T \in C^3([\tau_0, \tau_1], T)$ eine reguläre parametrische Kurve auf (τ_0, τ_1). Sei nun $Z = Y \circ t : [\tau_0, \tau_1] \to \mathbb{R}^n$. Zeige
   (a) Z ist eine reguläre parametrische Kurve auf (τ_0, τ_1).
   (b) Mit dem metrischen Tensor $g = (g_{ij})_{i,j=1}^d$ von Y gilt: $L(Z) = \displaystyle\int_{\tau_0}^{\tau_1} \sqrt{\sum_{i,j=1}^{d} g_{ij}(t(\tau))\dot{t}_i(\tau)\dot{t}_j(\tau)\, d\tau}$

4. Sei $X = X(u, v) : \Omega \to \mathbb{R}^3 \in C^3(\Omega, \mathbb{R}^3)$ eine reguläre parametrische Fläche.
   (a) Zeige: Für den Flächeninhalt von X gilt: $A(X) = \displaystyle\int_\Omega |X_u(u, v) \times X_v(u, v)| \, du\, dv$.
   (b) Wir nehmen nun an, X ließe sich global als Graph schreiben, $X(u, v) = (u, v, f(u, v))$ mit einer Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R} \in C^3(\Omega)$. Zeige, dann gilt $A(X) = \displaystyle\int_\Omega \sqrt{1 + \nabla f(u, v)^2}\, du\, dv$.

5. Seien $\rho, R, T > 0$ Parameter und $X = X(u, v) = (u \cos v, u \sin v, \rho v)$ eine Fläche definiert für $(u, v) \in \Omega = (0, R) \times (0, T)$.
   (a) Bestimme in jedem Punkt $(u, v) \in \Omega$ zwei Tangenten T_1, T_2 und eine Normale N an die Fläche, so dass die Abbildungen $T_1, T_2, N : \Omega \to \mathbb{R}^3$ stetig differenzierbar und punktweise linear unabhängig sind.
   (b) Bestimme den metrischen Tensor und den Flächeninhalt von X.