Anmerkung zu Blatt 10

Wir betrachten das System:

$$\begin{aligned} t' &= \frac{h}{\varrho}, \\ h' &= -\frac{t}{\varrho} + \frac{b}{\tau}, \\ b' &= -\frac{h}{\tau}. \end{aligned} \tag{1}$$

Dabei bilden die Funktionen t, h und b das Intervall $[0, S]$ in die $S^2 := \{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : |x| = 1\}$ ab. Wir wollen das System (1) im folgenden Frenetsches System nennen. Im Buch [BL] wird auf die geometrische Relevanz dieses Systems eingangen. Wenn man eine Kurve $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(s) : [0, S] \to \mathbb{R}^3$ der Klasse C^3 in Bogenlängenparametrisierung - also mit $|\mathfrak{x}'| \equiv 1$ - gegeben hat, dann genügen die Vektoren $\mathfrak{t} = \mathfrak{x}'$, $\mathfrak{h} = |\mathfrak{x}''|^{-1}\mathfrak{x}''$ und $\mathfrak{b} = \mathfrak{t} \times \mathfrak{h}$ der vektorwertigen Version von System (1). Die Größen $\frac{1}{\varrho}$ und $\frac{1}{\tau}$ bezeichnen wir auch als Krümmung und Windung der Kurve. Es stellt sich heraus, dass umgekehrt eine Kurve durch Angabe ihrer Krümmung und Windung eindeutig bis auf isometrische Transformation bestimmt ist. Wir nennen eine Transformation isometrisch, wenn sie eine Komposition aus einer Translation und einer orthogonalen Transformation ist. Das klärt die geometrische Relevanz des Frenetschen Systems. Weiter bemerken wir

$$tt' + hh' + bb' = 0,$$

also

$$t^2 + h^2 + b^2 = c$$

mit einer Konstanten $c > 0$. Wir bezeichnen nun die Abbildung $\pi : S^2 \setminus \{(1, 0, 0)\} \to \mathbb{C}$ vermöge

$$\pi(t, h, b) = \frac{t + ih}{1 - b} \qquad \text{für alle} \qquad (t, h, b) \in S^2 \setminus \{(1, 0, 0)\}$$

als stereographische Projektion mit der inversen Abbildung $\pi^{-1} : \mathbb{C} \to S^2 \setminus \{(1, 0, 0)\}$. Dabei können wir

$$\pi^{-1}(w) = \left(\frac{w + \bar{w}}{w\bar{w} + 1}, -i\frac{w - \bar{w}}{w\bar{w} + 1}, \frac{w\bar{w} - 1}{w\bar{w} + 1} \right) \qquad \text{für alle} \qquad w \in \mathbb{C}$$

schreiben. Die Aussagen

$$\pi \circ \pi^{-1}(w) = w \qquad \text{und} \qquad \pi^{-1} \circ \pi(t, h, b) = (t, h, b)$$

sehen wir durch elementare algebraische Operationen sehr leicht ein. Schließlich betrachten wir noch die komplexwertige Funktion $\sigma : [0, S] \to \mathbb{C}$ der Klasse C^1. Wir nehmen an, σ genüge der Differentialgleichung

$$\sigma' = -\frac{i}{\varrho}\sigma + \frac{i}{2\tau}(\sigma^2 - 1). \tag{2}$$

Wir wollen nun die folgende Aussage zeigen: Die Größen $(t, h, b) : [0, S] \to S^2 \setminus \{(1, 0, 0)\}$ genügen dem System (1) genau dann, wenn die Größe $\sigma := \pi(t, h, b) : [0, S] \to \mathbb{C}$ der Gleichung (2) genügt. Wir berechnen also:

$$\begin{aligned} & \sigma' + \frac{i}{\varrho}\sigma - \frac{i}{2\tau}(\sigma^2 - 1) \\ = \; & \frac{t' + ih'}{1 - b} + b'\frac{t + ih}{(1 - b)^2} + \frac{i}{\varrho}\frac{t + ih}{1 - b} - \frac{i}{2\tau}\left(\frac{t^2 - h^2 + 2ith}{(1 - b)^2}\right) + \frac{i}{2\tau} \\ = \; & \frac{1}{1 - b}\left\{t' - \frac{h}{\varrho}\right\} + \frac{i}{1 - b}\left\{h' + \frac{t}{\varrho} - \frac{b}{\tau}\right\} + \frac{i}{1 - b}\frac{b}{\tau} + \frac{t + ih}{(1 - b)^2}\left\{b' + \frac{h}{\tau}\right\} - \frac{t + ih}{(1 - b)^2}\frac{h}{\tau} \\ & -\frac{i}{2\tau}\left(\frac{t^2 - h^2 + 2ith}{(1 - b)^2}\right) + \frac{i}{2\tau} \end{aligned}$$

Unter Beachtung von System (1) folgt damit

$$\begin{aligned}
\sigma' + \frac{i}{\varrho}\sigma - \frac{i}{2\tau}(\sigma^2-1) &= \frac{i}{2\tau(1-b)^2}\left\{2b(1-b) - 2(h-it)h - t^2 + h^2 - 2ith + (1-b)^2\right\} \\
&= \frac{i}{2\tau(1-b)^2}\left\{2b - b^2 - h^2 - t^2 - b^2 + (1-b)^2\right\} \\
&= \frac{i}{2\tau(1-b)^2}\left\{2b - 1 - b^2 + (1-b)^2\right\} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Um die Rückrichtung einzusehen, beachten wir zunächst

$$\bar{\sigma}' = \frac{i}{\varrho}\bar{\sigma} - \frac{i}{2\tau}(\bar{\sigma}^2+1)$$

und

$$\begin{aligned}
\sigma'\bar{\sigma} + \sigma\bar{\sigma}' &= \frac{i}{2\tau}\left(\sigma^2\bar{\sigma} - \bar{\sigma} - \bar{\sigma}'\sigma + \bar{\sigma}\right) \\
&= \frac{i}{2\tau}\left(\sigma - \bar{\sigma}\right)\left(\sigma\bar{\sigma} + 1\right).
\end{aligned}$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}
t' &= \left(\frac{\sigma+\bar{\sigma}}{\sigma\bar{\sigma}+1}\right)' \\
&= \frac{\sigma'+\bar{\sigma}'}{\sigma\bar{\sigma}+1} - \frac{\sigma+\bar{\sigma}}{(\sigma\bar{\sigma}+1)^2}(\sigma'\bar{\sigma}+\sigma\bar{\sigma}') \\
&= -i\frac{1}{\varrho}\frac{\sigma-\bar{\sigma}}{\sigma\bar{\sigma}+1} + i\frac{1}{2\tau}\left(\frac{\sigma^2-1-\bar{\sigma}^2+1}{\sigma\bar{\sigma}+1}\right) - i\frac{1}{2\tau}\left(\frac{(\sigma+\bar{\sigma})(\sigma-\bar{\sigma})}{\sigma\bar{\sigma}+1}\right) \\
&= \frac{h}{\varrho}.
\end{aligned}$$

Ebenso gelten

$$\begin{aligned}
h' &= \left(-i\frac{\sigma-\bar{\sigma}}{\sigma\bar{\sigma}+1}\right)' \\
&= -i\frac{\sigma'-\bar{\sigma}'}{\sigma\bar{\sigma}+1} + i\frac{\sigma-\bar{\sigma}}{(\sigma\bar{\sigma}+1)^2}(\sigma'\bar{\sigma}+\sigma\bar{\sigma}') \\
&= -\frac{1}{\varrho}\frac{\sigma+\bar{\sigma}}{\sigma\bar{\sigma}+1} + \frac{1}{2\tau}\left(\frac{\sigma^2-1-\bar{\sigma}^2-1}{\sigma\bar{\sigma}+1}\right) - \frac{1}{2\tau}\left(\frac{(\sigma-\bar{\sigma})^2}{\sigma\bar{\sigma}+1}\right) \\
&= -\frac{1}{\varrho}\frac{\sigma+\bar{\sigma}}{\sigma\bar{\sigma}+1} + \frac{1}{\tau}\left(\frac{\sigma\bar{\sigma}-1}{\sigma\bar{\sigma}+1}\right) \\
&= -\frac{t}{\varrho} + \frac{b}{\tau}
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
b' &= \left(\frac{\sigma\bar{\sigma}-1}{\sigma\bar{\sigma}+1}\right)' \\
&= \frac{\sigma'\bar{\sigma}+\sigma\bar{\sigma}'}{\sigma\bar{\sigma}+1} - \frac{\sigma\bar{\sigma}-1}{(\sigma\bar{\sigma}+1)^2}(\sigma'\bar{\sigma}+\sigma\bar{\sigma}') \\
&= \frac{i}{2\tau}\frac{(\sigma-\bar{\sigma})}{\sigma\bar{\sigma}+1}(\sigma\bar{\sigma}+1-\sigma\bar{\sigma}+1) \\
&= \frac{1}{\tau}i\frac{\sigma-\bar{\sigma}}{\sigma\bar{\sigma}+1} \\
&= -\frac{h}{\tau}.
\end{aligned}$$

Literatur

[BL] *Wilhelm Blaschke, Kurt Leichtweiß* Elementare Differentialgeometrie, Springer Verlag, 1973.