Anmerkung zu Blatt 11
Die Charakteristikenmethode

Wir möchten das folgende Cauchysche Anfangswertproblem lösen

$$\begin{aligned} a(x,y,z)z_x + b(x,y,z)z_y &= z, \\ z|_{\Gamma'} &= \zeta. \end{aligned}$$

Hierbei setzen wir an alle auftretenden Funktionen voraus, dass sie hinreichend oft differenzierbar sind, so dass alle folgenden Aussagen Sinn machen, insbesondere die Existenz gewisser Ableitungen garantiert ist. Weiter soll die Kurve Γ' Projektion einer regulären und nicht-charakteristischen Kurve Γ in die xy-Ebene gemäß Vorlesung sein. Wir können Γ' somit wie folgt schreiben:

$$\Gamma' = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\, x = \xi(t),\, y = \eta(t),\, t \in (0,T)\}.$$

Wegen obiger Voraussetzung an Γ' gilt insbesondere

$$a(\xi,\eta,\zeta)\eta' - b(\xi,\eta,\zeta)\xi' \neq 0. \tag{1}$$

Die Charakteristikenmethode besteht nun darin die folgenden parametrisierten Anfangswertprobleme für gewöhnliche Differentialgleichungen zu lösen:

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}x(s,t) &= a(x(s,t),y(s,t),z(s,t)), \qquad x(0,t) = \xi(t), \\ \frac{d}{ds}y(s,t) &= b(x(s,t),y(s,t),z(s,t)), \qquad y(0,t) = \eta(t), \\ \frac{d}{ds}z(s,t) &= c(x(s,t),y(s,t),z(s,t)), \qquad z(0,t) = \zeta(t). \end{aligned} \tag{2}$$

Nun ist die Abbildung $(x(s,t), y(s,t))$ wegen (1) und (2) in einer Umgebung von Γ' lokal invertierbar, denn es gilt

$$x_s y_t - y_s x_t = a\eta' - b\xi' \neq 0.$$

Als Gegenbeispiel dazu betrachte man zum Beispiel $xz_x + yz_y = 0$ zu den Anfangswerten $z(x,x) = x^2$. Dann ist die Funktion

$$\tilde{z} = \tilde{z}(x,y) = z(s(x,y), t(x,y))$$

eine Lösung unseres Ausgangsproblems. Es gilt

$$\begin{aligned} a\tilde{z}_x + b\tilde{z}_y &= x_s(z_s s_x + z_t t_x) + y_s(z_s s_y + z_t t_y) \\ &= z_s(s_x x_s + s_y y_s) + z_t(t_x x_s + t_y y_s) \\ &= z_s \\ &= c \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \tilde{z}|_{\Gamma'} &= \tilde{z}(\xi,\eta) \\ &= z(s(\xi,\eta), t(\xi,\eta)) \\ &= z(s(x(0,t),y(0,t)), t(x(0,t),y(0,t))) \\ &= z(0,t) \\ &= \zeta(t). \end{aligned}$$