Anmerkung zu Blatt 12
Integrierender Faktor und Trennung der Veränderlichen

1. Wir betrachten als erstes Modelproblem zur Integration die Differentialgleichung

$$(x^4 + x^2y^2)\,dx + (y^3x + yx^3)\,dy = 0. \tag{1}$$

Diese Differentialgleichung ist nicht exakt. Denn es gilt

$$\frac{\partial}{\partial y}(x^4 + x^2y^2) = 2x^2y \neq y^3 + 3yx^2 = \frac{\partial}{\partial y}(y^3x + yx^3),$$

jedoch ist die Funktion

$$\frac{P_y - Q_x}{Q} = \frac{2x^3y - y^3 - 3x^2y}{y^3x + yx^3} = -\frac{y(x^2 + y^3)}{xy(x^2 + y^2)} = -\frac{1}{x}$$

unabhängig von y. Wir erwarten somit einen integrierenden Faktor $\mu = \mu(x)$, welcher ebenfalls unabhängig von y ist. Um diese Erwartung zu rechtfertigen, betrachten wir

$$\begin{aligned}
\mu_x &= \frac{P_y - Q_x}{Q}\mu \Leftrightarrow \\
0 &= -Q\mu_x + (P_y - Q_x)\mu \Leftrightarrow \\
0 &= (P\mu)_y - (Q\mu)_x.
\end{aligned}$$

Wir beachten nun mit $\Phi = \log \mu$

$$\Phi_x = -\frac{1}{x}$$

also

$$\Phi = -\log x + c$$

und somit

$$\mu = \frac{c}{x}.$$

Wir wählen $c = 1$, damit transformiert sich die Differentialgleichung (1) zu der exakten Differentialgleichung

$$(x^3 + xy^2)\,dx + (y^3 + yx^2)\,dy = 0. \tag{2}$$

Der Vorlesung entnehmen wir die Lösungsformel

$$\begin{aligned}
F(x,y) &= \int_{x_0}^{x} (s^3 + sy_0^2)\,ds + \int_{y_0}^{y} (t^3 + tx^2)\,dt \\
&= \frac{1}{4}(x^4 - x_0^4) + \frac{y_0^2}{2}(x^2 - x_0^2) + \frac{1}{4}(y^4 - y_0^4) + \frac{x^2}{2}(y^2 - y_0^2) \\
&= \frac{1}{4}(x^2 + y^2)^2 + const.
\end{aligned}$$

Schließlich bedeutet das, dass alle implizit durch

$$x^2 + y^2 = const \tag{3}$$

definierten Kurven Lösungen der Differentialgleichung (2) sind. Wir beachten folgende Aussagen

(a) Die Lösungen $\mu(x,y) = 0$ sind Lösungen der modifizierten Differentialgleichung. Es bleibt zu überprüfen, ob sie auch Lösungen der ursprünglichen Differentialgleichung sind.

(b) Die Lösungen $\frac{1}{\mu(x,y)} = 0$ sind eventuell weggefallen. Wir müssen überprüfen, ob sie Lösungen der ursprünglichen Differentialgleichung waren.

Wir bemerken, dass Fall (a) nicht eintreffen kann. Aber Fall (b) ist möglich. In diesem Falle gilt $x = 0$ und wir bemerken, dass diese Kurve ebenfalls Lösung der Differentialgleichung (1) ist, welche sich der Darstellung (3) entzieht. Die Lösungsgesamtheit besteht also aus den durch die Gleichung (3) implizit gegebenen Kurven und der Kurve $x = 0$.

2. Als zweites Modelproblem betrachten wir die Differentialgleichung

$$dy - \sqrt{y}\, dx = 0. \tag{4}$$

Die Methode der Trennung der Veränderlichen liefert zunächst

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sqrt{y}}\, dy &= \int dx \\ 2\sqrt{y} &= x + c \\ y(x) &= \frac{(x+c)^2}{4} \end{aligned} \tag{5}$$

Um zum Anfangswert $y(0) = 0$ die Konstante c zu berechnen, müssen wir die Wurzel ziehen und erhalten mit $c = 0$ eine Lösung, nämlich

$$y(x) = \frac{x^2}{4}, \qquad x \geq 0.$$

Jedoch ist $y \equiv 0$ ebenfalls eine Lösung unseres Anfangswertproblems. Wir haben also **zwei** Lösungen gefunden. Um das zu begründen, beachten wir, dass wir die Differentialgleichung (4) äquivalent umschreiben können zu

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{y}.$$

Die Funktion $F(y) = \sqrt{y}$ erfüllt jedoch keine Lipschitzbedingung in y ist aber gleichmäßig stetig für alle $y \geq 0$. Wenn F eine Lipschitzbedingung erfüllen würde, dann würde es eine Konstante $L > 0$ geben mit

$$|F(x) - F(y)| \leq L|x - y| \qquad \text{für alle} \qquad x,\, y \geq 0.$$

Ist dieses Aussage falsch, dann gibt es für jedes $L > 0$ zwei nicht-negative Zahlen $x = x(L), y = y(L)$ mit

$$|F(x) - F(y)| > L|x - y|.$$

Zum Beispiel leisten $x = \frac{1}{4L^2}$, $y = 0$ das Gewünschte. Um die gleichmäßige Stetigkeit einzusehen, wählen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit $0 \leq y \leq x$ und erhalten

$$\begin{aligned} \sqrt{y} &\leq \sqrt{x} \Leftrightarrow \\ 2y &\leq 2\sqrt{xy} \Leftrightarrow \\ x - 2\sqrt{xy} + y &\leq x - y \Leftrightarrow \\ (\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 &\leq (x - y). \end{aligned}$$

Das hat dann

$$|F(x) - F(y)| \leq \sqrt{|x-y|} \qquad \text{für alle} \qquad x,\, y \geq 0$$

zur Folge. Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es also ein $\delta = \delta(\varepsilon) = \varepsilon^2$, so dass

$$|F(x) - F(y)| \leq \varepsilon \qquad \text{für alle} \qquad x,\, y \geq 0 \qquad \text{mit} \qquad |x-y| \leq \delta$$

richtig ist. Nach dem tiefliegenden Existenzsatz von Peano (vgl. http://mathsrv.ku-eichstaett.de/MGF /homes/wirsching/k2.pdf) ist das Anfangswertproblem für $y(0) = 0$ zwar lösbar, die Frage nach der Eindeutigkeit wird hier jedoch negativ beantwortet werden müssen. Um den Satz von Peano in aller Strenge anwenden zu können, sollte man sich noch Gedanken über die Fortsetzung von F für negative y machen. Zum Beispiel könnten wir F gleichmäßig stetig durch

$$\tilde{F}(y) = \operatorname{sgn}(y)\sqrt{|y|}$$

fortsetzen und würden durch $y = -\frac{x^2}{4}$ eine dritte Lösung des Anfangswertproblems

$$\frac{dy}{dx} = \tilde{F}(y), \qquad y(0) = 0$$

erhalten.

3. Als drittes Modelproblem betrachten wir nun die Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} = 1 - \frac{y}{x}.$$

Hierbei setzen wir $x > 0$ voraus. In diesem Fall können wir $u = \frac{y}{x}$ oder $y = xu$ substituieren. Wir erhalten dann

$$x\frac{du}{dx} + u = 1 - u.$$

Eine Trennung der Veränderlichen liefert

$$\int \frac{du}{1-2u} = \int \frac{dx}{x}$$

beziehungsweise

$$u = \frac{c}{x^2} + \frac{1}{2}.$$

Und Rücksubstitution liefert schließlich

$$y(x) = \frac{c}{x} + \frac{x}{2} \qquad x > 0.$$