Anmerkung zu Blatt 13
Spezielle Typen gewöhnlicher Differentialgleichungen

1. Wir betrachten zunächst die Differentialgleichung

$$y' = -xy + 2x. \tag{1}$$

Von dieser Differentialgleichung bestimmen wir zunächst die homogene Lösung, also die Lösung der Differentialgleichung

$$y' = -xy \tag{2}$$

Wir erhalten

$$\frac{d}{dx} \log y = -x,$$

woraus

$$\log y = -\frac{x^2}{2} + c_1$$

beziehungsweise

$$y(x) = c \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \tag{3}$$

folgt. Variation der Konstanten liefert

$$y' = c' \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) - cx \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \stackrel{!}{=} -xy + 2x.$$

Wir erhalten also

$$c' = 2x \exp\left(\frac{x^2}{2}\right),$$

beziehungsweise

$$c = 2\int x \exp\left(\frac{x^2}{2}\right) dx = 2\int \exp t \, dt = 2 \exp t + c = 2 \exp\left(\frac{x^2}{2}\right) + c.$$

Dies zusammen mit (3) liefert die allgemeine Lösung der Differentialgleichung (1)

$$y(x) = 2 + c \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right).$$

2. Wir betrachten nun eine homogene Differentialgleichung

$$\frac{y}{x} \, dx + \, dy = 0 \tag{4}$$

zum Grade Null. Gemäß Vorlesung erhalten wir hier als integrierenden Faktor

$$\mu = \frac{-Q}{xP + yQ} = -\frac{1}{2y}.$$

Durch Multiplikation mit -2μ wird die Differentialgleichung (4) zur exakten Differentialgleichung

$$\frac{1}{x} \, dx + \frac{1}{y} \, dy = 0,$$

welche die allgemeine Lösung

$$\log xy = const$$

beziehungsweise

$$yx = const$$

oder auch

$$y = \frac{c}{x}$$

hat. Hier ist der Fall $y \equiv 0$ für $c = 0$ enthalten, $x = 0$ ist schon in der Differentialgleichung (4) nicht möglich.

3. Als letztes Beispiel möchten wir die allgemeine Lösung der Riccatischen Differentialgleichung

$$y' = y^2 + 1 \tag{5}$$

ermitteln. Aus der letzten Übung kennen wir eine partikuläre Lösung, nämlich $y_0 = \tan x$. Wir substituieren deshalb $u = y - y_0$ oder $y = u + y_0$. Es folgt dann

$$y' - y^2 - 1 \quad = \quad u' + y_0' - (u^2 + 2uy_0 + y_0^2) - 1$$

beziehungsweise

$$u' - u^2 - 2\tan xu = 0.$$

Wenn wir diese Bernoullische Differentialgleichung durch u^2 dividieren, erhalten wir für die Grösse $z = -\frac{1}{u}$ eine lineare Differentialgleichung

$$z' + 2\tan xz - 1 = 0.$$

Wir berechnen nun die homogene Lösung dieser linearen Differentialgleichung. Es gilt

$$(\log z)' = 2\frac{-\sin x}{\cos x},$$

was

$$\log z = \log \cos^2 x + c$$

und schließlich

$$z = c\cos^2 x$$

liefert. Wir variieren nun die Konstante und erhalten

$$c' = \frac{1}{\cos^2 x},$$

beziehungsweise

$$c = \tan x + \tilde{c}.$$

Damit folgt schliellich

$$z(x) = (\tan x + c)\cos^2 x.$$

Gehen wir nun zu unserer ursprünglichen Riccatischen Differentialgleichung (5) über, so erhalten wir

$$\begin{aligned} y(x) \quad &= \quad -\frac{1}{z} + y_0 = -\frac{1}{(\tan x + c)\cos^2 x} + \tan x = \frac{\tan x(\tan x + c)\cos^2 x - 1}{(\tan x + c)\cos^2 x} \\ &= \quad \frac{c\cos^2 x \tan x + \sin^2 x - 1}{(\tan x + c)\cos^2 x} = \frac{c\tan x - 1}{\tan x + c} = \frac{c\sin x - \cos x}{c\cos x + \sin x} \end{aligned}$$

als allgemeine Lösung. Wir bemerken, dass in dieser Lösung die ursprüngliche partikuläre Lösung nicht mehr enthalten sein kann, da $\frac{1}{z} = 0$ für keine Wahl von c möglich ist.