Klausur Analysis III - Maß und Integral, gewöhnliche Differentialgleichungen

Prof. Dr. Friedmar Schulz, Dipl.-Math. Jens Dittrich

15.02.2006

Name: **Vorname:** **Matrikel-Nr:**

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	Summe
Soll	3	4	5	4	4	4	3	5	32
Ist									

Dauer: 120min.
Hilfsmittel: Zwei beidseitig, handbeschriebene DIN A4 Blätter.

1. Seien $(\Omega, \mathcal{A})$ und $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B})$ Meßbarkeitsräume und $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ eine meßbare Abbildung. Sei weiter die Abbildung $|\cdot| : \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$ für $x = (x_1, \dots, x_n)$ gegeben durch
$$|x| := \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_i^2}.$$
Zeigen Sie: $g : \Omega \to [0, \infty)$ mit $g = |f|$ ist meßbar.

2. Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $f : \Omega \to [0, \infty]$ eine nichtnegative Funktion. Zeigen Sie, dass dann die Abbildung $\nu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ mit
$$\nu(A) := \int_A f \, d\mu := \int_\Omega f \chi_A \, d\mu$$
ein Maß auf $\mathcal{A}$ ist.

3. Sei der Maßraum $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, \lambda)$ gegeben und seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen. Zeigen Sie: Ist $f = g$ λ-fast überall, so folgt $f \equiv g$.

Bitte wenden!

4. Berechnen Sie die folgenden Integrale

$$\int_{(0,+\infty)} f_k \, d\lambda$$

der Funktionen $f_k : (0,\infty) \to \mathbb{R}$, welche durch

$$f_k(x) := \frac{e^{-kx}}{\sqrt{x}}$$

definiert sind, und ermitteln Sie unter Benutzung des Lebesgueschen Konvergenzsatzes

$$\int_{(0,+\infty)} \lim_{k\to\infty} f_k \, d\lambda.$$

Hier wird durch $d\lambda$ das Lebesguemaß auf der reellen Achse bezeichnet.
Hinweis: Es gilt $\int_{(0,+\infty)} f_1 \, d\lambda = \sqrt{\pi}$.

5. Überprüfen Sie die folgende Differentialgleichung auf Exaktheit und integrieren Sie diese unter Verwendung eines integrierenden Faktors $\mu = \mu(y)$

$$y(\log y + x + 2x \log x) + xy' = 0,$$

für $x > 0$ und $y > 0$.

6. Bestimmen Sie die Lösungsgesamtheit der folgenden Bernoullischen Differentialgleichung

$$y' x \log x + (xy - 1)y = 0,$$

hierbei sei $x > 1$.

7. Lösen Sie die folgende Differentialgleichung mit der Methode "Variation der Konstanten"

$$xy' + y = 2x \cos(x^2),$$

für $x \neq 0$.

8. Finden Sie die allgemeine Lösung der Diffferentialgleichung

$$y'' + k^2 y = 0,$$

zu einem $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Ermitteln Sie die Lösung zu den Anfangswerten $y(0) = y_0 \in \mathbb{R}$ und $y'(0) = y_1 \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass die Lösung rein reell ist.

Viel Erfolg!