Klausurlösung Analysis III - Maß und Integral, gewöhnliche Differentialgleichungen

Prof. Dr. Friedmar Schulz, Jens Dittrich

15.02.2006

1. Wir betrachten zunächst die Abbildung $|\cdot|$ und ermitteln für beliebige $x, y \in \mathbb{R}^n$ mit der inversen Dreiecksungleichung $||x| - |y|| \leq |x - y|$. Folglich gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta = \delta(\varepsilon) = \varepsilon$ mit
$$||x| - |y|| \leq \varepsilon \qquad \text{für alle} \qquad x, y \in \mathbb{R}^n \,\text{mit}\, |x - y| \leq \delta.$$
Damit ist die Abbildung $|\cdot|$ stetig. Gemäß Vorlesung ist die Verkettung aus einer meßbaren und einer stetigen Abbildung meßbar.

2. Da $f \geq 0$ folgt wegen der Monotonie des Integrals sofort $\nu \geq 0$, weiter gilt
$$\nu(\emptyset) = \int_\Omega f\chi_\emptyset \, d\mu = \int_\Omega f \cdot 0 \, d\mu = 0.$$
Sei nun zu $k \in \mathbb{N}$ eine Folge paarweise disjunkter Mengen $A_k \in \mathcal{A}$ gegeben. Wir berechnen nun unter Verwendung des Satzes von der gliedweisen Integration von Reihen nicht negativer Funktionen
$$\begin{aligned} \nu\left(\bigcup_{k=1}^\infty A_k\right) &= \int_\Omega f\chi_{\bigcup_{k=1}^\infty A_k} \, d\mu \\ &= \int_\Omega \sum_{k=1}^\infty f\chi_{A_k} \, d\mu \\ &= \sum_{k=1}^\infty \int_\Omega f\chi_{A_k} \, d\mu \\ &= \sum_{k=1}^\infty \nu(A_k). \end{aligned}$$
Damit ist alles gezeigt.

3. Wir nehmen an, die Aussage wäre falsch. Dann gibt es einen Punkt $x_0 \in \mathbb{R}$, an welchem die stetige Funktion $h := f - g$ nicht verschwindet. Da h stetig ist, gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0$, so dass
$$|h(x) - h(x_0)| \leq \varepsilon \qquad \text{für alle} \qquad x \in \mathbb{R} \text{ mit } |x - x_0| \leq \delta.$$
Wählen wir nun $\varepsilon \leq \frac{h(x_0)}{2}$, so folgt mit der inversen Dreiecksungleichung
$$||h(x_0)| - |h(x)|| \leq \frac{|h(x_0)|}{2} \qquad \text{für alle} \qquad x \in \mathbb{R} \text{ mit } |x - x_0| \leq \delta\left(\frac{|h(x_0)|}{2}\right).$$
Damit folgt
$$0 < \frac{1}{2}|h(x_0)| \leq |h(x)| \leq \frac{3}{2}|h(x_0)| \qquad \text{für alle} \qquad x \in \mathbb{R} \text{ mit } |x - x_0| \leq \delta\left(\frac{|h(x_0)|}{2}\right).$$

Damit folgt aber

$$\lambda\{x \in \mathbb{R}^n \, : \, h(x) \neq 0\} \geq \lambda\{x \in \mathbb{R}^n \, : \, |x - x_0| \leq \delta(|h(x_0)|/2)\} = \omega_n \left(\delta\left(\frac{|h(x_0)|}{2}\right)\right)^n > 0.$$

im Widerspruch zu $f = g$ λ-fast überall. Damit ist die Annahme falsch, dass $f \equiv g$ nicht gilt, also folgt $f \equiv g$.

4. Um die einzelnen Integrale zu berechnen, müssen wir jeweils $t = kx$, also $dt = k\,dx$ substituieren. Wir erhalten

$$\int_{(0,+\infty)} f_k \, d\lambda = \int_0^\infty \frac{e^{-kx}}{\sqrt{x}} \, dx = \frac{\sqrt{k}}{k} \int_0^\infty \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} \, dt = \sqrt{\frac{\pi}{k}}.$$

Es ist außerdem f_1 eine integrable Majorante für alle anderen f_k, damit folgt nach Lebesgue

$$\int_{(0,+\infty)} \lim_{k\to\infty} f_k \, d\lambda = \lim_{k\to\infty} \int_{(0,+\infty)} f_k \, d\lambda = \sqrt{\pi} \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\sqrt{k}} = 0.$$

5. Diese Differentialgleichung ist nicht exakt, denn es gilt

$$\frac{\partial}{\partial y} y(\log y + x + 2x \log x) = \log y + 1 + x + 2x \log x \neq 1 = \frac{\partial}{\partial x} x.$$

Wir berechnen nun
$$\frac{P_y - Q_x}{Q} = \frac{\log y + 1 + x + 2x \log x - 1}{y(\log y + x + 2x \log x)} = \frac{1}{y}$$

und wir erhalten

$$\frac{d}{dy} \log \mu = -\frac{1}{y} \quad \Rightarrow \quad \log \mu = -\log y + c \quad \Rightarrow \quad \mu = \frac{c}{y}.$$

Damit ist die Differentialgleichung

$$(\log y + x + 2x \log x) + \frac{x}{y} y' = 0$$

exakt, wir können integrieren

$$\begin{aligned} F(x,y) &= \int_{x_0}^x (\log y_0 + s + 2s \log s) \, ds + \int_{y_0}^y \frac{x}{t} \, dt \\ &= \log y_0 (x - x_0) + \frac{1}{2}(x^2 - x_0^2) + x^2 \log x - x_0^2 \log x_0 - \frac{1}{2}(x^2 - x_0^2) + x(\log y - \log y_0) \\ &= x^2 \log x + x \log y + c. \end{aligned}$$

Die Lösungen sind implizit gegeben durch

$$x(\log y + x \log x) = c,$$

äquivalentes Umstellen nach y liefert dann

$$y(x) = \exp\left(\frac{c}{x} - x \log x\right) = \frac{e^{c/x}}{x^x}.$$

6. Zunächst nehmen wir $y \neq 0$ an und dividieren durch y^2. Wir erhalten

$$\frac{y'}{y^2} - \frac{1}{x \log x} \frac{1}{y} + \frac{1}{\log x} = 0.$$

Mit Hilfe der Substitution $z = -\frac{1}{y}$ gehen wir über zu einer linearen Differentialgleichung

$$z' + \frac{1}{x \log x} z + \frac{1}{\log x} = 0.$$

Von dieser bestimmen wir zunächst die homogene Lösung

$$\frac{d}{dx} \log z = -\frac{1}{x \log x} \Rightarrow \log z = -\int \frac{dx}{x \log x} = -\int \frac{du}{u} = -\log u + c = -\log\log x + c$$

beziehungsweise

$$z = \frac{c}{\log x}.$$

Variation der Konstanten liefert uns

$$\frac{c'}{\log x} = -\frac{1}{\log x},$$

also

$$c = -x + \tilde{c}.$$

Somit folgen

$$z(x) = -\frac{x - \tilde{c}}{\log x} \qquad \text{und} \qquad y(x) = -\frac{1}{z} = \frac{\log x}{x - \tilde{c}}, \qquad x \neq \tilde{c},\, x > 1.$$

7. Wir ermitteln wiederum zunächst die Lösung der homogenen Gleichung

$$y' = -\frac{1}{x} y.$$

Das liefert

$$\frac{d}{dx} \log y = -\frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad \log y = -\log x + c \quad \Rightarrow \quad y = \frac{c}{x}$$

und Variation der Konstanten liefert

$$c' = 2x \cos(x^2) \quad \Rightarrow \quad c = \sin(x^2) + \tilde{c},$$

also erhalten wir

$$y(x) = \frac{\sin(x^2) - \tilde{c}}{x}.$$

8. Zunächst betrachten wir das charakteristische Polynom dieser Differentialgleichung

$$\lambda^2 + k^2 = 0,$$

welches die rein-imaginären Nullstellen $\lambda_{1,2} = \pm ik$ hat. Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung lautet somit

$$y(x) = ce^{ikx} + de^{-ikx}$$

mit der Ableitung

$$y'(x) = ik\left(ce^{ikx} - de^{-ikx}\right).$$

Einsetzen der Anfangswerte führt auf ein lineares Gleichungssystem

$$\begin{aligned} y_0 &= c + d \\ y_1 &= ikc - ikd \end{aligned}$$

welches eine nicht-verschwindende Determinante hat. Die Lösung lautet

$$\begin{aligned} c &= \frac{1}{2}\left(y_0 - \frac{i}{k}y_1\right), \\ d &= \frac{1}{2}\left(y_0 + \frac{i}{k}y_1\right). \end{aligned}$$

Wir stellen fest, dass $c = \bar{d}$ gilt, also schreibt sich die Lösung des Anfangswertproblems

$$y(x) = ce^{ikx} + \bar{c}e^{-ikx} = 2\mathrm{Re}\,\left(ce^{ikx}\right) \in \mathbb{R}.$$