Abteilung: Analysis
Prof. Dr. Friedmar Schulz
Übungsleiter: Jens Dittrich

Übungen zur Analysis III - Maß und Integral, gewöhnliche Differentialgleichungen - Blatt 1
Abgabe: 1. November, 16:00 Uhr vor der Übung

1. **(5 Punkte)** In der Vorlesung wird ein (maßtheoretischer) Ring definiert durch: *Ein nicht-leeres System $\mathcal{R}$, $\emptyset \neq \mathcal{R} \subset \mathcal{P}(X)$, von Teilmengen einer abstrakten Menge X heißt* **Ring***, wenn folgende zwei Bedingungen erfüllt sind:*

   (i) $A, B \in \mathcal{R} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{R}$, *(ii)* $A, B \in \mathcal{R} \Rightarrow A \setminus B \in \mathcal{R}$.

   Wir erklären nun die Verknüpfungen $+ : \mathcal{R} \times \mathcal{R} \to \mathcal{R}$ und $* : \mathcal{R} \times \mathcal{R} \to \mathcal{R}$ mittels:

   $$\begin{aligned} A + B &:= \{x \mid \text{entweder } (x \in A \text{ und } x \notin B) \text{ oder } (x \notin A \text{ und } x \in B)\}, \\ A * B &:= A \cap B \end{aligned}$$

   für $A, B \in \mathcal{R}$. Es ergeben sich die folgenden Aufgaben:

   (a) Begründen Sie, warum die Operationen $+$ und $* : \mathcal{R} \times \mathcal{R} \to \mathcal{R}$ wohldefiniert sind.
   (b) Zeigen Sie: $(\mathcal{R}, +)$ ist eine kommutative Gruppe. Bestimmen Sie Inverses und Neutrales Element.
   (c) Zeigen Sie für $(\mathcal{R}, *)$ das Assoziativ- und das Kommutativgesetz.
   (d) Zeigen Sie: Für alle $A, B, C \in \mathcal{R}$ gilt $A * (B + C) = A * B + A * C$.

   Mit diesen Verknüpfungen wird ein (maßtheoretischer) Ring zu einem Algebraischen Ring $(\mathcal{R}, +, *)$.

2. **(2 Punkte)** Sei $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra. Man beweise:

   (a) Seien $A_k \in \mathcal{A}$ für $k = 1, 2, \ldots$, dann folgt $\cap_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{A}$.
   (b) Seien $A, B \in \mathcal{A}$, dann folgt $A \setminus B \in \mathcal{A}$.
   (c) Seien $A, B \in \mathcal{A}$, dann folgt $A + B := \{x \mid \text{entweder } (x \in A \text{ und } x \notin B) \text{ oder } (x \notin A \text{ und } x \in B)\} \in \mathcal{A}$.

3. **(3 Punkte)** Zu einem Mengensystem $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(X)$ sei das Mengensystem $\mathcal{A}(\mathcal{S}) \subset \mathcal{P}(X)$ gemäß Vorlesung erklärt. Zeigen Sie

   (a) $\mathcal{A}(\mathcal{S})$ ist eine σ-Algebra.
   (b) $\mathcal{A}(\mathcal{S})$ ist die kleinste σ-Algebra, die $\mathcal{S}$ enthält.

4. **(5 Punkte)** Sind $I, I_1, \ldots, I_N \in \mathcal{I}$ mit $I_k \cap I_l = \emptyset$ für $k \neq l$ und $I = \cup_{k=1}^{N} I_k$, dann gilt

   $$l(I) = \sum_{k=1}^{N} l(I_k).$$

   (a) Betrachten Sie zunächst den Spezialfall. Das Intervall I sei durch die I_k folgendermaßen zerlegt: Sei $j = 1, \ldots, n$, dann gibt es zu a_j und b_j die Größen $a_j = a_j^0 < a_j^1 < \ldots < a_j^{M_j - 1} < a_j^{M_j} = b_j$ mit einem $M_j \in \mathbb{N}$. Nun finden wir zu beliebigem $((a_1^{r_1}, \cdots, a_n^{r_n}))$ mit $r_j < M_j$ ein $k \in 1, \ldots, N$ mit

   $$I_k := \{x \in \mathbb{R}^n | a_j^{r_j} \leq x < a_j^{r_j + 1} \qquad \text{für} \qquad j = 1, \ldots, n\}.$$

   Im Folgenden wollen wir diese Zerlegung **totale Zerlegung** nennen. Beweisen Sie die Aussage für diesen Spezialfall.
   (b) Zeigen Sie, dass es in der allgemeinen Situation eine Zerlegung I_{k_l} der I_k gibt, so dass die I_{k_l} sowohle eine totale Zerlegung von I als von I_k sind.
   (c) Beweisen Sie mit den Punkten (a) und (b) die allgemeine Situation.

   (15 Punkte)