Abteilung: Analysis
Prof. Dr. Friedmar Schulz
Übungsleiter: Jens Dittrich

Übungen zur Analysis III - Maß und Integral, gewöhnliche Differentialgleichungen - Blatt 10
Abgabe: 18. Januar, 16:00 Uhr vor der Übung

1. **(6 Punkte)** Die Funktionen $(t, h, b) : [0, S] \to S^2 \setminus \{(0, 0, 1)\} \in C^1[0, T]$ genügen dem System

$$\begin{aligned} t' &= \frac{h}{\varrho}, \\ h' &= -\frac{t}{\varrho} + \frac{b}{\tau}, \\ b' &= -\frac{h}{\tau}. \end{aligned} \tag{1}$$

   mit $S^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 \, : \, |x| = 1\}$. Zeigen Sie:

   (a) Dann genügt die Größe $\sigma = \frac{t+ih}{1-b} : [0, S] \to \mathbb{C} \in C^1[0, S]$ der komplexen (Riccatischen) Differentialgleichung

$$\sigma' = -\frac{i}{\varrho}\sigma + \frac{i}{2\tau}(\sigma^2 - 1). \tag{2}$$

   (b) Ermitteln Sie die Inverse Abbildung $(t(\sigma), h(\sigma), b(\sigma)) : \mathbb{C} \to S^2 \setminus \{(0, 0, 1)\}$.

   (c) σ genüge der Gleichung (2). Dann genügen die Funktionen $(t(\sigma), h(\sigma), b(\sigma))$ dem System (1).

2. **(6 Punkte)** Wir betrachten eine homogene Gleichung m-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten:

$$y^{(m)} + a_{m-1}y^{(m-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = 0$$

   mit den Anfangswerten $(y(0), y'(0), \ldots y^{(m-1)}(0))$. Weiter wollen wir voraussetzen: Das Polynom $p(\lambda) = \lambda^m + a_{m-1}\lambda^{m-1} + \ldots a_1\lambda + a_0$ habe m paarweise verschiedene reelle Nullstellen.

   (a) Überführen Sie diese Gleichung in ein System von m Gleichungen erster Ordnung. Schreiben Sie dieses System in der Form

$$z' = A \circ z$$

   mit einer Konstanten Matrix A und den Anfangswerten $z(0)$. Drücken Sie diese Anfangswerte in den $(y(0), y'(0), \ldots y^{(m-1)}(0))$ und die Einträge von A in den Größen $a_{m-1}, \ldots, a_0$ aus.

   (b) Zeigen Sie: $\det(\lambda E - A) = p(\lambda)$.

   (c) Damit schreiben wir $A = P^{-1} \circ \Lambda \circ P$ und erklären $\zeta = P \circ z$. Leiten Sie ein System erster Ordnung für ζ her. Schreiben Sie die allgemeine Lösung dieses Systems hin.

   (d) Transformieren Sie zurück $z = P^{-1} \circ \zeta$. Schreiben Sie die allgemeine Lösung z hin. Warum ist es nicht notwendig die Transformationsmatrix P zu kennen? Begründen Sie das!

3. **(3 Punkte)** Lösen Sie mit Hilfe von Aufgabe 2 die Anfangswertprobleme

   (a) $y'' - 3y' + 2y = 0, \qquad y(0) = 0,\ y'(0) = 1$

   (b) $y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0, \qquad y(0) = 1,\ y'(0) = 2,\ y''(0) = 0$

   (c) $y'' - y = 0, \qquad y(0) = 1,\ y'(0) = 0$

(15 Punkte)