Abteilung: Analysis
Prof. Dr. Friedmar Schulz
Übungsleiter: Jens Dittrich

Übungen zur Analysis III - Maß und Integral, gewöhnliche Differentialgleichungen - Blatt 12

Abgabe: 1. Februar, 16:00 Uhr vor der Übung

1. **(5 Punkte)** Gegeben seien die Differentialgleichungen $P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0$. Testen Sie diese auf Exaktheit und bestimmen Sie gegebenenfalls einen integrierenden Faktor $\mu = \mu(x,y)$. Lösen Sie anschließend die Differentialgleichungen, indem Sie die Kurvenintegrale

$$F(x,y) = \int_{x_0}^{x} \mu(s,y_0)P(s,y_0)\,ds + \int_{y_0}^{y} \mu(x,t)Q(x,t)\,dt.$$

auswerten und $F(x,y) = c$ setzen.

   (a) $(2x+4y+2)\,dx + (4x+12y+8)\,dy = 0.$

   (b) $(xy^2 + xye^x)dx + (2x^2y + xe^x)dy = 0$. Hinweis: es gibt einen nur von x abhängenden integrierenden Faktor $\mu = \mu(x)$.

   (c) $(2x^2y + y^3)\,dx + (x^3 + 2xy^2)\,dy = 0$. Hinweis: es gibt einen nur von $t = xy$ abhängenden integrierenden Faktor $\mu = \mu(t)$.

   (d) $2x(y+2x)dx + (x^2+y^2)dy = 0.$

2. **(5 Punkte)** Lösen Sie die folgenden Differentialgleichungen durch Trennung der Veränderlichen. Stellen Sie anschließend die Lösungsgesamtheit als Funktion $y = y(x)$ dar.

   (a) $2x(1+e^{-y})\,dx - \,dy = 0.$

   (b) $(1+2y)\,dx - (4-x)\,dy = 0.$

   (c) $x^2y\,dy + (1-y^2)\,dx = 0.$

   (d) $(y-1)\cos x\,dx - \,dy = 0$

3. **(5 Punkte)** Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der folgenden Differentialgleichungen. Hinweis: Substituieren Sie $u = \frac{y}{x}$ und führen Sie danach eine Trennung der Veränderlichen aus. Stellen Sie anschließend die Lösungsgesamtheit als Funktion $y = y(x)$ dar.

   (a) $y' = \frac{y^2 - 2xy}{x^2}$ für $x \neq 0$.

   (b) $y' = \frac{y}{x}(\log y - \log x)$ für $x, y \neq 0$.

   (c) $y' = -\frac{x^2+y^2}{xy}$ für $x \neq 0$ und $y \neq 0$.

   (d) $y' = \frac{x^2y + y^3}{x^3}$ für $x \neq 0$.

(15 Punkte)