Abteilung: Analysis
Prof. Dr. Friedmar Schulz
Übungsleiter: Jens Dittrich

Übungen zur Analysis III - Maß und Integral, gewöhnliche Differentialgleichungen - Blatt 2
Abgabe: 9. November, 16:00 Uhr vor der Übung

1. **(4 Punkte)** Ein nicht-leeres System $\mathcal{A}$, $\emptyset \neq \mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$, von Teilmengen einer Menge X heißt **Algebra**, wenn

   (i) $A,\, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{A}$, *(ii)* $A \in \mathcal{R} \Rightarrow \mathcal{C}A \in \mathcal{A}$.

   Sei nun $\overline{\mathcal{I}}$ das System aller beschränkten und unbeschränkten Intervalle im $\mathbb{R}^n$, und sei $\overline{\mathcal{E}}$ das System aller endlichen Vereinigungen von disjunkten Intervallen $I \in \overline{\mathcal{I}}$. Beweisen Sie:

   (a) $\overline{\mathcal{E}}$ ist eine Algebra.

   (b) Es gilt $\mathcal{A}(\overline{\mathcal{I}}) = \mathcal{A}(\mathcal{I})$. Hierbei ist $\mathcal{A}(\mathcal{J})$ die kleinste σ-Algebra, die von $\mathcal{J}$ erzeugt wird und $\mathcal{I}$ das System aller beschränkten Intervalle im $\mathbb{R}^n$.

2. **(4 Punkte)** Seien X und X^* Mengen, sei weiter $f : X \to X^*$ eine Abbildung. Man zeige:

   (a) Ist $\mathcal{A}^* \subset \mathcal{P}(X^*)$ eine σ-Algebra, so ist
   $$\mathcal{A} := \{f^{-1}(A^*) \,:\, A^* \in \mathcal{A}^*\}$$
   ebenfalls eine σ-Algebra.

   (b) Ist $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ eine σ-Algebra, so auch
   $$\mathcal{A}^* := \{A^* \in \mathcal{P}(X^*) \,:\, f^{-1}(A^*) \in \mathcal{A}\}.$$

3. **(4 Punkte)** Sei $\mathcal{R} \subset \mathcal{P}(X)$ ein Ring und $\mu : \mathcal{R} \to [0, +\infty]$ ein Inhalt. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

   (a) Für $A,\, B \in \mathcal{R}$ folgt $\mu(A) + \mu(B) = \mu(A \cup B) + \mu(A \cap B)$.

   (b) Für $A,\, B \in \mathcal{R}$ mit $A \subset B$ folgt $\mu(A) \leq \mu(B)$.

   (c) Für $A,\, B \in \mathcal{R}$ mit $A \subset B$ und $\mu(A) < +\infty$ folgt $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$.

   (d) Für $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{R}$ folgt
   $$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{N} A_k\right) \leq \sum_{k=1}^{N} \mu(A_k)$$

4. **(3 Punkte)** Es sei X eine Menge, $\mathcal{R} \subset \mathcal{P}(X)$ ein Ring und μ ein Prämaß auf $\mathcal{R}$. Für $A \subset X$ sei
   $$\mu^*(A) := \begin{cases} \inf\left\{\sum_{k=1}^{\infty} \mu(E_k) \,:\, E_k \in \mathcal{R},\, A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right\}, & \text{falls } \{\ldots\} \neq \emptyset \\ +\infty, & \text{sonst} \end{cases}$$
   erklärt. Man beweise:

   (a) $\mu^* \geq 0, \qquad \mu^*(\emptyset) = 0$

   (b) $A \subset B \Rightarrow \mu^*(A) \leq \mu^*(B)$

   (c) $A_1,\, A_2, \ldots \subset X \Rightarrow \mu^*\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(A_k)$.

   (15 Punkte)