Abteilung: Analysis
Prof. Dr. Friedmar Schulz
Übungsleiter: Jens Dittrich

Übungen zur Analysis III - Maß und Integral, gewöhnliche Differentialgleichungen - Blatt 3

Abgabe: 16. November, 16:00 Uhr vor der Übung

1. **(3 Punkte)**
   (a) Seien A, $B \subset \mathbb{R}^n$. Dann gilt: $\chi_{A\cap B} = \chi_A\chi_B$, $\chi_{A\cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_{A\cap B}$, $\chi_{A^c} = 1 - \chi_A$
   (b) Seien $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ einfache Funktionen, dann ist für alle λ, $\mu \in \mathbb{R}$ die Funktion $h := \lambda f + \mu g$ einfach.
   (c) In der Situation von Aufgabe (b) ist die Funktion $k = fg$ ebenfalls einfach.
2. **(3 Punkte)** Seien $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ gegeben durch
   $$f_n(x) := \begin{cases} nx^n & \text{falls} \quad n \text{ gerade} \\ -x^n & \text{falls} \quad n \text{ ungerade} \end{cases}$$
   Berechnen Sie $\inf_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)$, $\liminf_{n\to\infty} f_n(x)$ und $\limsup_{n\to\infty} f_n(x)$
3. **(4 Punkte)**
   (a) Seien $f, g : \Omega \to \mathbb{R}$ meßbare Funktionen. Dann sind die Mengen
   $$A := \{x \in \Omega \,|\, f(x) < g(x)\} \qquad \text{und} \qquad B := \{x \in \Omega \,|\, f(x) = g(x)\}$$
   meßbar.
   (b) Seien $f, g : \Omega \to \mathbb{R}$ meßbare Funktionen. Dann sind die Funktionen
   $$f(x) + g(x) \qquad \text{und} \qquad f(x)g(x)$$
   meßbar.
   (c) Sei $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von meßbaren Funktionen $\Omega \to \mathbb{R}$. Sei S die Menge aller Punkte $x \in \Omega$ für die $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert. Zeigen Sie, dass S meßbar ist.
4. **(5 Punkte)** Sei
   $$A := \left\{ z + \sum_{k=1}^{\infty} a_k 2^{-2k} \,|\, z \in \mathbb{Z}, \, , \, a_k \in \{0,1\} \right\}.$$
   (a) Zeigen Sie, dass die Menge $A_0 := A \cap [0,1)$ eine Lebesguesche Nullmenge ist. Wählen Sie dazu eine geeignete endliche Teilmenge $\{a_1, \ldots, a_l\} \in A_0$ und überdecken Sie A_0 durch Intervalle $[a_i, a_i + \varepsilon)$, so dass die Überdeckung beliebig kleines Maß hat.
   (b) Folgern Sie daraus, dass A eine Lebesguesche Nullmenge ist.
   (c) Beweisen Sie, dass es eine weitere Nullmenge A' so gibt, dass gilt: Sei $x \in \mathbb{R}$, dann kann man
   $$x = a + a'$$
   mit einem $a \in A$ und einem $a' \in A'$ schreiben.

(15 Punkte)