Abteilung: Analysis
Prof. Dr. Friedmar Schulz
Übungsleiter: Jens Dittrich

Übungen zur Analysis III - Maß und Integral, gewöhnliche Differentialgleichungen - Blatt 4

Abgabe: 23. November, 16:00 Uhr vor der Übung

1. **(4 Punkte)** Betrachte zu jedem $\varepsilon > 0$ die Funktion

$$K_\varepsilon(z) := \frac{1}{\sqrt{\pi\varepsilon}^n} \exp\left(-\frac{|z|^2}{\varepsilon}\right), \qquad z \in \mathbb{R}^n.$$

Dann besitzt $K_\varepsilon = K_\varepsilon(z)$ die folgenden Eigenschaften:

(a) $K_\varepsilon(z) > 0$ für alle $z \in \mathbb{R}^n$.

(b) $\int_{\mathbb{R}^n} K_\varepsilon(z)\, dz = 1$

(c) Für jedes $\delta > 0$ gilt: $\lim_{\varepsilon \to 0+} \int_{|z| \geq \delta} K_\varepsilon(z)\, dz = 0$.

2. **(6 Punkte)**

(a) Sei $f \in C_0^1(\mathbb{R}^n)$ und $g \in C^1(\mathbb{R}^n)$. Dann gilt

$$\int_{\mathbb{R}^n} g(x) \frac{\partial}{\partial x_i} f(x)\, dx = -\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial}{\partial x_i} g(x) f(x)\, dx, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

(b) Sei $f \in C_0^0(\mathbb{R}^n)$ und $f_\varepsilon(x) = \int_{\mathbb{R}^n} K_\varepsilon(y-x) f(y)\, dy$ für $x \in \mathbb{R}^n$ erklärt. Dann gilt

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |f(x) - f_\varepsilon(x)| \to 0 \qquad (\varepsilon \to 0).$$

(c) Sei $f \in C_0^k(\mathbb{R}^n)$ und $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ ein Multiindex mit $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n \leq k$. Mit der Setzung $D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial^{\alpha_1} \ldots \partial^{\alpha_n}}$ folgt:

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |D^\alpha f(x) - D^\alpha f_\varepsilon(x)| \to 0 \qquad (\varepsilon \to 0).$$

3. **(5 Punkte)** Zu gegebenem $\varepsilon > 0$, und der Kugel $K_r(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, |x - x_0| < r\}$ konstruiere eine stetige Funktion $f : \mathbb{R}^n \to [0,1]$ mit den Eigenschaften:

$$\begin{aligned} \lambda(\Delta_\varepsilon(f, \chi_{K_r(x_0)})) &< \varepsilon \\ f(x) &= 1 \qquad \text{für alle} \qquad x \in K_r(x_0) \end{aligned}$$

(15 Punkte)