Abteilung: Analysis
Prof. Dr. Friedmar Schulz
Übungsleiter: Jens Dittrich

Übungen zur Analysis III - Maß und Integral, gewöhnliche Differentialgleichungen - Blatt 5

Abgabe: 30. November, 16:00 Uhr vor der Übung

1. **(3 Punkte)**
   (a) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine beschränkte offene Menge. Wir definieren
   $$\Omega(t) := \{x \in \Omega \,|\, dist(x, \partial\Omega) < t\}.$$
   Dann gilt $\lambda(\Omega(t)) \to 0$ für $t \to 0$.
   (b) Sei $\Omega = K_r(x_0)$ die offene Kugel im $\mathbb{R}^n$ vom Radius r um den Punkt x_0. Konstruieren sie $\Omega(t)$, und führen sie den Grenzübergang explizit aus, ohne auf Teilaufgabe (a) zuückzugreifen. (Hinweis: Benutzen Sie die in der letzten Übung hergeleitete Formel für das Volumen einer Kugel.)
2. **(4 Punkte)** Es sei $f : (a, b) \to [0, +\infty)$ stetig mit $-\infty < a < b < +\infty$. Zeigen Sie f ist genau dann Lebesgue-integrierbar, wenn das uneigentliche Riemannintegral $\int_a^b f(x)\,dx$ existiert. Dann gilt
   $$\int_{(a,b)} f\,d\lambda = \int_a^b f(x)\,dx.$$
3. **(4 Punkte)** Es sei $X = [a, b]$ mit $-\infty < a < b < +\infty$ und λ das Lebesgue-Maß auf X. Weiter sei $g : X \to \mathcal{R}$ eine Treppenfunktion. Zeigen Sie
   (a)
   $$\int_X g\,d\lambda = \int_a^b g(x)\,dx \text{ für jede nicht-negative Treppenfunktion } g \text{ auf } X.$$
   (b)
   $$\int_X f\,d\lambda = \int_a^b f(x)\,dx \text{ für jede nicht-negative stetige Funktion } f \text{ auf } X.$$
4. **(4 Punkte)** Es sei $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge Borel-meßbarer Funktionen $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
   (a) Für $\varepsilon > 0$, $N_0 \in \mathbb{N}$ sei
   $$C(\varepsilon, N_0) := \{x \in \mathbb{R} \,|\, |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon, \forall n, m \geq N_0\}$$
   Zeigen Sie: $C(\varepsilon, N_0)$ ist Borel-meßbar.
   (b) Zeigen Sie $C := \{x \in \mathbb{R} \,|\, \lim_{n\to+\infty} f_n(x) \text{ existiert in } \mathbb{R}\}$ ist Borel-meßbar.

   (15 Punkte)