Abteilung: Analysis
Prof. Dr. Friedmar Schulz
Übungsleiter: Jens Dittrich

Übungen zur Analysis III - Maß und Integral, gewöhnliche Differentialgleichungen - Blatt 6
Abgabe: 7. Dezember, 16:00 Uhr vor der Übung

1. **(5 Punkte)** Gegeben sei der Maßraum $(\Omega, \mathcal{B}, \lambda)$. Weiter sei die Funktion $f(t,x)$ für jedes $t \in (a,b)$ integrabel. Wir setzen nun $F(t) := \int_\Omega f(t,x)\, d\lambda$.
   (a) Falls zusätzlich
      i. f stetig in $t_0 \in (a,b)$ füer alle $x \in \Omega$ ist und
      ii. ein $\varepsilon > 0$ und eine integrable Funktion g mit $|f(t,x)| \le g(x)$ für alle $(t,x) \in (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \times \Omega$ existiert,

      so ist F stetig in t_0.
   (b) Falls zusätzlich
      i. f differenzierbar in einer Umgebung von $t_0 \in (a,b)$ füer alle $x \in \Omega$ ist und
      ii. ein $\varepsilon > 0$ und eine integrable Funktion g mit $|\frac{\partial f(t,x)}{\partial t}| \le g(x)$ für alle $(t,x) \in (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \times \Omega$ existiert,

      so ist F differenzierbar in t_0 und es gilt
$$F'(t_0) = \int_\Omega \frac{\partial}{\partial t} f(t,x)|_{t_0}\, d\lambda.$$
2. **(3 Punkte)** Es sei $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1}\, dt$ für $x > 0$ die Eulersche Gammafunktion. Zeigen Sie:
$$\Gamma'(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} (\log t) t^{x-1}\, dt$$
   für alle $x > 0$.
3. **(3 Punkte)** Für $t \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ und für alle $t \in (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$ gelte $F(t) := \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)$ konvergiert absolut, $f_n(t)$ sei differenzierbar mit $|f_n'(t)| \le g_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\sum_{k=1}^{\infty} g_n < +\infty$. Dann gilt: $F'(t_0) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(t)$.
4. **(4 Punkte)** Gegeben sei der Maßraum $(\Omega, \mathcal{B}, \lambda)$. Eine Funktion $f : \Omega \to \mathbb{C}$ heißt meßbar, falls $\mathbb{C}$ mit dem $\mathbb{R}^2$ identifiziert wird ($\mathbb{R}^2$ sei mit der Borel-σ-Algebra $\mathcal{B}_2$ versehen) und f bezüglich $(\mathcal{B}, \mathcal{B}_2)$-meßbar ist.
   (a) $f : \Omega \to \mathbb{C}$ heißt meßbar genau dann, wenn $\Re f$ und $\Im f$ meßbar sind.
   (b) Nach (a) ist folgende Definition sinnvoll: Eine Funktion $f : \Omega \to \mathbb{C}$ heißt integrabel, falls f meßbar ist und $\Re f$, $\Im f$ integrabel sind. Man setzt $\int_\Omega f\, d\lambda = \int_\Omega \Re f\, d\lambda + i \int_\Omega \Im f\, d\lambda$. Zeigen Sie: sind $f, g : \Omega \to \mathbb{C}$ integrierbar und $a, b \in \mathbb{C}$, so ist $af + bg$ integrabel und es gilt $\int_\Omega af + bg\, d\lambda = a \int_\Omega f\, d\lambda + b \int_\Omega g\, d\lambda$.

(15 Punkte)