Abteilung: Analysis
Prof. Dr. Friedmar Schulz
Übungsleiter: Jens Dittrich

Übungen zur Analysis III - Maß und Integral, gewöhnliche Differentialgleichungen - Blatt 7
Abgabe: 14. Dezember, 16:00 Uhr vor der Übung

1. **(4 Punkte)** Es sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $f : X \to [0, +\infty)$ einfach. Zeigen Sie:

   (a)
$$\int_X f\,d\mu = \sup\left\{\sum_{k=1}^n \left(\inf_{x\in B_k} f(x)\right)\mu(B_k) \,:\, B_1, \dots, B_n \in \mathcal{A},\ \text{paarweise disjunkt},\ \bigcup_{k=1}^n B_k = X\right\}$$
$$= \inf\left\{\sum_{k=1}^n \left(\sup_{x\in C_k} f(x)\right)\mu(C_k) \,:\, C_1, \dots, C_n \in \mathcal{A},\ \text{paarweise disjunkt},\ \bigcup_{k=1}^n C_k = X\right\}.$$

   (b) Sind $0 < c_1 < c_2 < \cdots < c_n$ die endlich vielen verschiedenen positiven Werte, die f annimmt, und setzt man $c_0 = 0$, so gilt:
$$\int_X f\,d\mu = \sum_{k=1}^n (c_k - c_{k-1})\mu\left(\{x \in X \,:\, f(x) \geq c_k\}\right).$$

2. **(4 Punkte)** Es sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $f : X \to \bar{\mathbb{R}}$ eine nicht-negative meßbare Funktion. Zeigen Sie: Es gibt eine Folge $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ von einfachen Funktionen $X \to \mathbb{R}$, so dass für alle $x \in X$ gilt
$$0 \leq f_n(x) \leq f_{n+1}(x)\,\forall n \in \mathbb{N} \qquad \text{und} \lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x).$$

   Hinweis: Definieren Sie für festes $n \in \mathbb{N}$:
$$E_{k,n} = \{x \in X \,:\, k2^{-n} \leq f(x) < (k+1)2^{-n}\} \qquad \text{für} \qquad k \in 0, 1, \dots, n2^n - 1,$$
$$E_{k,n} = \{x \in X \,:\, f(x) \geq n\} \qquad \text{für} \qquad k = n2^n,$$
   und $f_n = \sum_{k=0}^{n2^n} k2^{-n}\chi_{E_{k,n}}$.

3. **(3 Punkte)** Es sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum mit $\mu(X) = +\infty$. Sei weiter $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ eine Folge von meßbaren Funktionen mit $f_n : X \to \mathbb{R}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $f : X \to \mathbb{R}$ meßbar. Geben Sie ein Beispiel an für:
$$f_n \to f\,(n \to \infty)\,\mu - f.ü.,\ \text{aber nicht}\ f_n \xrightarrow{\mu} f.$$

4. **(4 Punkte)** Es sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Zeigen Sie

   (a) Sei $\mathcal{N} = \{N \subset X \,:\, \exists \tilde{N} \in \mathcal{A} \,:\, N \subset \tilde{N}\,,\ \mu(\tilde{N}) = 0\}$. Dann ist $\hat{\mathcal{A}} := \{A \cup N \,:\, A \in \mathcal{A}\,,\ N \in \mathcal{N}\}$ eine σ-Algebra und $\hat{\mu}(A \cup N) := \mu(A)$ ein wohldefiniertes, vollständiges Maß auf $\hat{\mathcal{A}}$ mit $\hat{\mu}|_{\mathcal{A}} = \mu$.

   (b) Sei $\tilde{\mathcal{A}} \subset \mathcal{P}(X)$ eine σ-Algebra mit $\mathcal{A} \subset \tilde{\mathcal{A}}$ und $\tilde{\mu}$ ein vollständiges Maß auf $\tilde{\mathcal{A}}$ mit $\tilde{\mu}|_{\mathcal{A}} = \mu$. Dann ist $\hat{\mathcal{A}} \subset \tilde{\mathcal{A}}$ mit $\tilde{\mu}|_{\hat{\mathcal{A}}} = \hat{\mu}$.

(15 Punkte)