Abteilung: Analysis
Prof. Dr. Friedmar Schulz
Übungsleiter: Jens Dittrich

Übungen zur Analysis III - Maß und Integral, gewöhnliche Differentialgleichungen - Blatt 8

Abgabe: 21. Dezember, 16:00 Uhr vor der Übung

Die folgenden Anfangswertprobleme sind nach der tieferliegenden Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen eindeutig in der Klasse C^2 lösbar. Darüberhinaus sind die Lösungen der Differentialgleichungen lokal in eine Potenzreihe entwickelbar. Darum sind die folgenden Aufgaben sinnvoll.

1. **(6 Punkte)** Lösen Sie die folgenden Anfangswertprobleme durch Potenzreihenansatz.
   (a) $y'' + xy = 0, \qquad y(0) = 1,\ y'(0) = 0.$
   (b) $y'' + y' - xy^2 = 0, \qquad y(0) = 2,\ y'(0) = 1.$
   (c) $y'' + e^x y = 0, \qquad y(0) = 2,\ y'(0) = 1.$

2. **(3 Punkte)**
   (a) Man verifiziere: Die Potenzreihe

   $$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{k!(k+1)!2^{2k+1}}$$

   genügt der Differentialgleichung

   $$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + (x^2 - 1)y = 0. \tag{1}$$

   (b) Man gewinne umgekehrt eine Lösung $y(x)$ der Differentialgleichung (1) durch Potenzreihenansatz $y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$, d.h. man gehe mit diesem Ansatz in die Differentialgleichung ein und gewinne durch Koeffizientenvergleich eine Rekursionsformel.

3. **(3 Punkte)**
   (a) Man bestimme die Potenzreihenentwicklung von $\cosh x$ und $\sinh x$ um Null.
   (b) Man löse die Diffenrentialgleichung $y'' = y$ durch Potenzreihenansatz und bestimme die Lösungen zu den Anfangsbedinungen

   $$y(0) = 1, \quad y'(0) = 0 \qquad \text{und} \qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$$

4. **(3 Punkte)**
   (a) Man bestimme eine Lösung des Anfangswertproblems $y' = y$ zum Anfangswert $y(0) = y_0 > 0$ durch Potenzreihenansatz.
   (b) Weisen Sie die Eindeutigkeit nach, in dem Sie annehmen es würde eine zweite, von der Potenzreihe verschiedene Lösung geben und diese Annahme zu einem Widerspruch führen.

(15 Punkte)