Abteilung: Analysis
Prof. Dr. Friedmar Schulz
Übungsleiter: Jens Dittrich

Übungen zur Analysis III - Maß und Integral, gewöhnliche Differentialgleichungen - Blatt 9
Abgabe: 11. Januar, 16:00 Uhr vor der Übung

Als der Weihnachtsnachtsmann vor Jahren die Vorlesung über gewöhnliche Differentialgleichungen besucht hat, fiel ihm auf, dass man den Satz von Picard-Lindelöff auf ganz besondere Weise verallgemeinern konnte. Er nannte ihn dann Banachschen Fixpunktsatz, und legte ihn in diesem Jahr den Mathematikern unter den Weihnachtsbaum. Doch leider war es das einzige Jahr, in dem er diesen Satz verschenkte. Deshalb werden Sie sich in dieser Übung selbst ein Geschenk machen. Zunächst nennen wir ein Tupel $(\mathcal{B}, \|.\|)$ einen Banachraum, wenn:

1. $\mathcal{B}$ ein Vektorraum ist,
2. die Abbildung $\|.\| : \mathcal{B} \to [0, +\infty)$ erfüllt:
   (a) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$,
   (b) $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$ für alle $x \in \mathcal{B}$ und alle $\lambda \in \mathbb{R}$,
   (c) $\|x + y\| \le \|x\| + \|y\|$ für alle x, $y \in \mathcal{B}$,
3. für jede Folge $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{B}$ mit: für alle $\varepsilon > 0$ gibt es ein $K = K(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, so dass $\|x_k - x_l\| \le \varepsilon$ für alle k, $l \ge K(\varepsilon)$ gilt: es gibt ein $x \in \mathcal{B}$, so dass es für alle $\varepsilon > 0$ ein $K = K(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ gibt derart dass $\|x_k - x\| \le \varepsilon$ für alle $k \ge K(\varepsilon)$ richtig ist (d.h. jede Cauchyfolge konvergiert)

gilt.

1. **(8 Punkte)** Sei $(\mathcal{B}, \|.\|)$ ein Banachraum und $T_\lambda : \mathcal{B} \to \mathcal{B}$ eine für alle $\lambda \in [0, 1]$ stetige Schar von Abbildungen und die Kurve $T_\lambda(x)$ sei stetig für alle $\lambda \in [0, 1]$ und alle $x \in \mathcal{B}$. Weiter gibt es ein $\theta \in [0, 1)$ mit
$$\|T_\lambda(x) - T_\lambda(y)\| \le \theta\|x - y\| \qquad \text{für alle} \qquad x,\, y \in \mathcal{B} \qquad \text{und} \qquad \lambda \in [0, 1.$$
   (a) Setzen Sie $\varrho = \max_{0\le\lambda\le1} \|T_\lambda(0)\|$ und $r = \varrho/(1 - \theta)$. Zeigen Sie für alle $x \in \mathcal{B}$ mit $\|x\| \le r$ gilt: $\|T_\lambda(x)\| \le r$ für alle $\lambda \in [0, 1]$.
   (b) Sei $x_\lambda^{(n)} := T_\lambda^n(0) = T_\lambda \circ T_\lambda^{n-1}(0)$ für $n = 1, 2, ...$ und $T_\lambda^0 = Id_{\mathcal{B}}$. Zeigen sie die Konvergenz der Folge $\{x_\lambda^{(n)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ gegen ein $x_\lambda \in \mathcal{B}$, in dem sie den Ausdruck als Teleskopsumme aufschreiben und für die Reihe eine konvergente Majorante finden.
   (c) Zeigen Sie, dass $x_\lambda = T_\lambda(x_\lambda)$ gilt und die x_λ stetig von λ abhängen.
   (d) Zeigen Sie die Eindeutigkeit des Fixpunktes x_λ.
2. **(7 Punkte)** Beweisen Sie nun mit Aufgabe 1 den Satz von Picard-Lindelöff erneut. Dazu sei $\mathcal{B} := C^0([a-h, a+h], \mathbb{R}^n)$ der Raum der auf $[a-h, a+h]$ stetigen Funktionen mit Werten im $\mathbb{R}^n$. Sei weiter $\|y\| := \sup_{x\in[a-h,a+h]} |y(x)|$ die Supremumsnorm und $T_\lambda : \mathcal{B} \to \mathcal{B}$ vermöge
$$T_\lambda[y](x)_i := y_i^0 + \int_{x_0}^{x} f_i(t, y_1(t), \ldots, y_n(t))\, dt$$
   mit den Bezeichnungen aus der Vorlesung, dabei sind die f_i stetig in $[a - h, a + h] \times \mathbb{R}^n \times [0, 1]$ und lipschitzstetig bezüglich y.
   (a) Zeigen Sie $(\mathcal{B}, \|.\|)$ ist ein Banachraum.
   (b) Zeigen Sie, dass T_λ den Voraussetzungen von Aufgabe 1 für hinreichend kleines $h > 0$ genügt.
   (c) Zeigen Sie, dass das AWP $y'(x) = f(x, y(x), \lambda)$ mit $y(x) = y_0$ für jedes $\lambda \in [0, 1]$ genau eine Lösung in $C^1([a - h, a + h], \mathbb{R}^n)$ hat.
   (d) Zeigen Sie, dass diese Lösungen stetig von λ abhängen.

(15 Punkte) Frohe Weihnachten und einen guten Rutsch!