VORLESUNG
DIFFERENTIALGEOMETRIE SS 07

MATTHIAS BERGNER

Inhaltsverzeichnis

Literatur iii

Einführung iv

Teil 1. Kurven 1

1. Kurven und ihre Bogenlänge 1
1.1. Parametrisierungen 1
1.2. Die Bogenlänge 2
2. Krümmung von Kurven 4
2.1. Nach Bogenlänge parametrisierte ebene Kurven 4
2.2. Reguläre ebene Kurven 6
2.3. Raumkurven 6
2.4. Der Hauptsatz der Kurventheorie 8
3. Vier Charakterisierungen der Krümmung 9
3.1. Graphen und lokale Normalform 9
3.2. Krümmung als inverser Radius des Schmiegkreises 11
3.3. Länge von Parallelkurven 13
3.4. Die Ableitung des Tangentenwinkels und Umlaufzahl 14
4. Globale Kurventheorie 15
4.1. Die Windungszahl geschlossener, ebener Kurven 15
4.2. Anwendung der Windungszahl: Fundamentalsatz der Algebra und Brouwerscher Fixpunktsatz 17
4.3. Die isoperimetrische Ungleichung 19
4.4. Ausblick: Weitere globale Eigenschaften ebener Kurven 21
5. Übungsaufgaben 23
5.1. Bogenlänge, Umparametrisierung 23
5.2. Krümmung ebener Kurven 24
5.3. Raumkurven und Frenettheorie 26

5.4. Globale Kurventheorie 27

Teil 2. Die äußere Geometrie von Hyperflächen 29

1. Parametrisierte Flächen 29
1.1. Bezeichnungen und Notation 29
1.2. Flächenstücke 29
1.3. Erste Fundamentalform 30
2. Die Normalen-Abbildung von Hyperflächen und ihre Ableitungen 32
2.1. Gauß-Abbildung 33
2.2. Die Weingarten-Abbildung 33
2.3. Die zweite Fundamentalform 35
2.4. Eigenschaften und Deutung der Hauptkrümmungen 38
2.5. Gauß- und mittlere Krümmung 38
2.6. Beispiel: Rotationsflächen 39
3. Lokale Normalform und Deutung der Gauß-Krümmung 41
3.1. Lokale Normalform: Darstellung als Graph 41
3.2. Die Gauß-Krümmung kompakter Hyperflächen 43
3.3. Gauß-Krümmung als Verzerrung der Gauß-Abbildung 44
4. Übungsaufgaben 46
4.1. Parametrisierte Flächen 46
4.2. Gauß-Abbildung 47
4.3. Hauptkrümmungen, Gauß- und mittlere Krümmung 48

Teil 3. Die innere Geometrie von Flächenstücken 55

1. Hyperflächengleichung und Integrabilitätsbedingungen 55
1.1. Orthogonale Zerlegung von $d^2 f$ und Christoffel-Symbole 55
1.2. Die Hyperflächengleichungen 56
1.3. Integrabilitätsbedingungen und Hauptsatz der Flächentheorie 58
1.4. Theorema egregrium 60
2. Geodätische auf Flächen 61
2.1. Geodätische 61
2.2. Erste Variation der Bogenlänge 65
3. Übungsaufgaben 68
3.1. Geodätische 68
3.2. Integrabilitätsbedingungen und theorema egregium 72

Literatur

Die klassische Kurven- und Flächentheorie ist das Thema folgender Bücher:

[B] Bär: Elementare Differentialgeometrie, de Gruyter 01, 25 Euro, (Detailliert und gut lesbar. Das am besten zur Vorlesung passende Buch.)

[DC] Do Carmo: Differentialgeometrie von Kurven und Flächen, Vieweg 83, engl.: Prentice Hall 76 (das klassische Standardwerk)

[Kl] Klingenberg: Eine Vorlesung über Differentialgeometrie / A course on differential geometry, Springer 1970 (kurz und bündig)

[Kü] Kühnel: Differentialgeometrie, Vieweg 99 / Differential Geometry, American Mathematical Society 02

[O] Oprea: Differential Geometry and its applications, Prentice Hall 97 (In diesem Buch wird eine elementare Darstellung der Differentialgeometrie ergänzt durch Abschnitte über die Programmierung in Maple.)

Literatur zu speziellen Fragestellungen:

[Be] Berger: Geometry I,II, Spinger Universitext, 1980 (Sehr umfangreich, daher für spezielle Themen geeignet, aber schwer zu lesen.)

[J] Jost: Riemannian Geometry and Geometric Analysis, Springer 2002. (als Einführung in die Riemannsche Geometrie).

[HT] Hildebrandt, Tromba: Kugel, Kreis und Seifenblasen, Birkhäuser 1996 (Ein populärwissenschaftliches Buch, das für Variations-Aspekte der Differentialgeometrie, beispielsweise Geodätische und Minimalflächen, eine schöne Einführung darstellt. Das Buch ist hübsch bebildert.)

[Sa] Sauvigny: Partielle Differentialgleichung der Geometrie und der Physik, Grundlagen und Integraldarstellungen, Springer 2004 (enthält ein interessantes Kapitel über den Brouwerschen Abbildungsgrad, einer Verallgemeinerung der in dieser Vorlesung behandelten Windungszahl).

[Sp] Spallek: Kurven und Karten, 2. Auflage, BI-Verlag 94 (enthält interessante Anwendungen der Kurventheorie: Zahnräder, Wankelmotor, Stabilität von Schiffen, etc.)

Einführung

Dieses Skript dient als Ergänzung zu der von mir im Sommersemester 2007 zu haltenden Vorlesung über Differentialgeometrie.

Als Einführung dient ein Kapitel über Kurventheorie, in dem wir uns im Wesentlichen auf ebene Kurven beschränken. Wir versuchen dabei, sauber zu trennen zwischen parametrisierten Kurven einerseits und ihren Äquivalenzklassen unter Umparametrisierungen andererseits, also den Kurven schlechthin.

Die Flächentheorie führen wir in beliebiger Dimension ein, d.h. wir betrachten Hyperflächen. Viele Konzepte und auch die Notation in zwei Dimensionen etwas zu speziell und lenken daher vom Grundsätzlichen ab. Eine weitere Entscheidung für die Präsentation war es, stets parametrisch zu arbeiten.

Dieses Skript lehnt sich im Wesentlichen an das von Prof. Große-Brauckmann erarbeitete Differentialgeometrie-Skipt an (http://www.mathematik.tu-darmstadt.de/ lehrmaterial/ SS2006/ DiffGeo/). Ich möchte mich recht herzlich bei ihm für seine Vorarbeit bedanken.

Die Übungsaufgaben, welche man am Ende eines jeden Kapitels findet, stammen von der im Sommersemester 2004 von Prof. Große-Brauckmann in Darmstadt gehaltenen Vorlesung, zu welcher ich die Übungen betreut habe.

Ulm, im April 2007

Teil 1. Kurven

`1. Vorlesung, Montag 18.4.07`

Die klassische Differentialgeometrie befasst sich mit Kurven und Flächen. Diese Objekte sind meist durch eine Abbildung oder Parametrisierung gegeben, seltener implizit, d.h. als Nullstellenmenge von Funktionen. Man interessiert sich für Eigenschaften, die nur von der Gestalt der Kurven oder Flächen abhängen, jedoch unabhängig von der konkret gegeben Parametrisierung. Es geht also darum, Eigenschaften zu finden, die unabhängig von Koordinaten und sogar unabhängig von den Parametern der speziellen Beschreibung sind.

Zuerst wollen wir im Falle von Kurven die geometrischen Begriffe Länge und Krümmung studieren. Um Kurven zu behandeln, genügt die Analysis einer Veränderlichen.

1. Kurven und ihre Bogenlänge

1.1. **Parametrisierungen.** Im folgenden steht $I \subset \mathbb{R}$ für beliebige Intervalle (offen, halboffen oder abgeschlossen).

Definition. (i) Eine *Parametrisierung* einer Kurve ist eine glatte (beliebig oft differenzierbare) Abbildung $c\colon I \to \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. Ihr Bild $c(I) \subset \mathbb{R}^n$ heißt *Spur*.
(ii) Diese c heißt *regulär* im Punkt $t_0 \in I$, falls $c'(t) \neq 0$ gilt. Die Parametrisierung heißt regulär, wenn sie in jedem Punkt $t \in I$ regulär ist.

In der Physik beschreibt eine parametrisierte Kurve c eine Bewegung: t ist Zeit, $c(t)$ ist bewegtes Objekt (Massenpunkt), der *Tangentialvektor* $c'(t)$ ist der Geschwindigkeitsvektor. In der Physik sind Kurven meist gegeben als Lösung einer gewöhnliche Differentialgleichung gegeben, z.B. die Bewegung eines Elektrons in einem elektromagnetischen Feld. Da wir auf die Regularität nicht genauer eingehen wollen, setzen wir stets Glattheit voraus, die Parametrisierungen sind beliebig oft differenzierbar. Sämtliche hier vorgestellten Sätze gelten jedoch auch für C^3-Kurven, einige Sätze auch für C^2- oder C^1-Kurven. *Beispiele* ebener Kurven $c\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$:

1. Der *Kreis* ist die Spur der regulären Kurve $c(t) := (\cos t, \sin t)$.

2. Die Spur von $c(t) := (\sin t, \sin 2t)$ ist die *Figur acht* oder *Lemniskate*.

3. Die *Neilsche Parabel* $c(t) := (t^2, t^3)$ ist nicht regulär, denn $c'(0) = 0$.

4. $c(t) := (t^3, t^3)$ hat als Spur die Diagonale von $\mathbb{R}^2$. Die Kurve ist jedoch nicht regulär, denn $c'(0) = 0$.

Definition. Eine *Parametertransformation* ist ein glatter Diffeomorphismus $\varphi\colon I \to \tilde{I}$ von Intervallen, für welchen $\varphi' > 0$ gilt. Dann nennen wir $\tilde{c} := c \circ \varphi$ eine *Umparametrisierung* von c und die Parametrisierung $\tilde{c}$ heißt zu c äquivalent.

Man überlegt sich leicht, dass die Äquivalenz zweier Kurven tatsächlich eine Äquivalenzrelation ist. Zusätzlich gilt, dass zwei zueinander äquivalente Kurven diesselbe Spur besitzen.

Definition. Eine *orientierte Kurve* ist die Äquivalenzklasse aller zu einer Parametrisierung äquivalenten Parametrisierungen.

Beispiele. 1. Die Kreise $c_1(t) = (\cos t, \sin t)$ für $t \in [0, 2\pi)$ sowie $c_2(t) = (\cos(2t), \sin(2t))$ für $t \in [0, \pi)$ sind zueinander äquivalent.
2. Die beiden Kreise $(\cos t, \sin t)$ und $(\cos(-t), \sin(-t))$ für $t \in [0, 2\pi)$ sind nicht zueinander äquivalent, da sie unterschiedliche Orientierungen besitzen.
3. Die Kreise $c_i(t) := (\cos t, \sin t)$ für $c_1 \colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ und $c_2 \colon [0, 4\pi] \to \mathbb{R}^2$ sind nicht äquivalent, denn die Anzahl der Urbilder ändert sich unter Umparametrisierung nicht.

Bemerkung. 1.) Im Allgemeinen identifizieren wir eine Kurve mit einer mit einer ihrer Parametrisierungen.
2.) Wir wollen explizit erwähnen, dass unsere Kurven auch Selbstschnitte haben können. Ein solches Beispiel ist die oben angegebene Lemniskate. An manchen Stellen werden wir jedoch nur eingebettete (d.h. injektive) Kurven betrachten.

1.2. **Die Bogenlänge.** Als erste Eigenschaft von Kurven, die unabhängig vom Repräsentanten ist, führen wir ein:

Definition. Die *(Bogen-)Länge* einer Kurve $c \colon I \to \mathbb{R}^n$ ist gegeben durch

$$L(c) = \int_I |c'(t)|\, dt \qquad \in [0, \infty]. \tag{1}$$

Bemerkungen. 1. Das Integral ist die kontinuierliche Version von: „zurückgelegter Weg = Geschwindigkeit mal Zeit“.
2. Falls I offen ist oder halboffen ist, so ist L ist ein uneigentliches Riemann-Integral und $L(c) = +\infty$ ist möglich. Falls I kompakt ist, gilt $L(c) < \infty$ (wieso?) und das Riemann-Integral reicht aus.

Wir wiederholen die Ihnen vielleicht schon aus der Analysis bekannte Rechnung, dass die Längenintegrale (1) von $c \colon I \to \mathbb{R}^n$ und $\tilde{c} = c \circ \varphi \colon \tilde{I} \to \mathbb{R}^n$ übereinstimmen:

$$L(c) = \int_I \big|c'(s)\big|\, ds \overset{\text{Substitution}}{=} \int_{\tilde{I}} \big|c'\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)\big|\, dt \overset{\text{Kettenregel}}{=} \int_{\tilde{I}} \big|(c \circ \varphi)'(t)\big|\, dt = L(\tilde{c})$$

Wir dürfen also auch $L = L(\Gamma)$ schreiben.

Beispiele. 1. Eine *Helix* oder *Schraubenlinie* mit Ganghöhe $2\pi h \in \mathbb{R}$ und Radius $r > 0$ wird durch

$$c \colon [a, b] \to \mathbb{R}^3, \qquad c(t) = \big(r \cos t, r \sin t, ht\big),$$

parametrisiert. Wegen $c'(t) = \big(-r\sin t, r\cos t, h\big)$ hat sie die Länge

$$L(c) = \int_a^b \sqrt{r^2+h^2}\,dt = (b-a)\sqrt{r^2+h^2}\,.$$

2. Die Kurve $c(t) := (t, \frac{1}{t})$ für $t \in (0,1)$ besitzt wegen

$$L(c) = \int\limits_0^1 |c'(t)|dt = \int\limits_0^1 \sqrt{1+\frac{1}{t^4}}dt \geq \int\limits_0^1 \frac{1}{t^2}dt = +\infty$$

unendliche Länge.

Auf die folgende Parameterdarstellung werden wir häufig zurückgreifen:

Satz 1. *(Existenz der Bogenlängenparameter)*
Es sei $c\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ eine reguläre Parametrisierung einer orientierten Kurve der Länge $L \in [0,+\infty)$. Dann gibt es einen orientierungserhaltenden Diffeomorphismus $\varphi\colon [0,L] \to [a,b]$, so dass der Repräsentant $\tilde{c} := c\circ\varphi\colon [0,L] \to \mathbb{R}^n$ von Γ auf Bogenlänge parametrisiert ist, d.h. es gilt $|\tilde{c}'| = 1$.

Beispiel. Der Kreis vom Radius $r > 0$ wird durch $c(t) = (r\cos\frac{t}{r}, r\sin\frac{t}{r})$ nach Bogenlänge parametrisiert, denn $|c'(t)| = \big|(-\sin\frac{t}{r}, \cos\frac{t}{r})\big| = 1$.

Beweis. Wir erklären folgende Hilfsfunktion

$$\ell\colon [a,b] \to [0,L], \qquad \ell(s) := \int_a^s |c'(\sigma)|\,d\sigma\,,$$

also ist $\ell(s)$ die Länge der Kurve $c|_{[a,s]}$. Wegen c regulär gilt $\ell'(s) = |c'(s)| > 0$. Damit existiert die Umkehrfunktion $\varphi := \ell^{-1} : [0,L] \to [a,b]$, welche ebenso wie ℓ glatt ist. Insbesondere ist φ differenzierbar mit

$$\varphi'(t) = \frac{1}{\ell'(\varphi(t))} = \frac{1}{|c'(\varphi(t))|} > 0.$$

Daraus folgt wie gewünscht

$$\big|(c\circ\varphi)'(t)\big| = \big|c'\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)\big| = 1.$$

□

Bemerkung. Zwar ist der Satz einfach zu beweisen, aber dennoch lässt sich in der Praxis oft die Bogenlängen-Parametrisierung nicht explizit angeben, z.B. für Ellipsen.

2. Krümmung von Kurven

Wir wollen die Krümmung von Kurven erklären. Als Grundanforderung an die Krümmung ebener Kurven stellen wir folgende *Postulate*:
1.) Eine Gerade habe Krümmung 0.
2.) Ein mathem. positiv durchlaufener Kreis vom Radius $r > 0$ habe die Krümmung $+1/r$.
3.) Ein mathem. negativ durchlaufener Kreis vom Radius $r > 0$ habe die Krümmung $-1/r$.
4.) Eine allgemeine Kurve soll als Krümmung im Punkt $c(t)$ die Krümmung eines "best-approximierenden" Kreises haben.
5.) Die Krümmung soll unabhängig von der gewählten Parametrisierung der Kurve sein.

Wir betrachten zunächst speziell parametrisierte Kurven.

`2. Vorlesung, Mittwoch 25.4.07` ______________________________

2.1. Nach Bogenlänge parametrisierte ebene Kurven.

Wir wollen zunächst die Normalenabbildung einer Kurve definieren ohne Bogenlängenparametrisierung zu verlangen:

Definition. Es sei eine ebene Kurve durch ihre reguläre Parametrisierung $c\colon I \to \mathbb{R}^2$ gegeben. Ihre Normale $n\colon I \to \mathbb{R}^2$ wählen wir so, dass die Vektoren $\left(\frac{c'}{|c'|}, n\right)$ in jedem Punkt der Kurve eine positiv orientierte Orthonormalbasis bilden.

Die Normale erfüllt also $|n(t)| = 1$, $\langle n(t), c'(t)\rangle = 0$ und $\det(c', n) > 0$.

Um eine Formel für die Normale anzugeben, führen wir die orientierte 90-Grad-Drehung ein, also die lineare Abbildung

$$J\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad J\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}.$$

Man beachte $J^2 = -E$, wobei E die Einheitsmatrix ist. Wir erfüllen die Definition von n, indem wir setzen

$$n = J \cdot \frac{c'}{|c'|}\ .$$

Wenn c auf Bogenlänge parametrisiert ist, so vereinfacht sich die Formel zu $n = Jc'$.

Bei einer nach Bogenlänge parametrisierten Kurve gilt (einfache, aber wichtige Rechnung!):

$$\langle c'', c'\rangle = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\underbrace{\langle c', c'\rangle}_{\equiv 1} = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad c'' \perp c' \ \Leftrightarrow\ c'' \parallel n$$

Die Vektoren c'' und n sind also linear abhängig. Damit ist folgende Definition sinnvoll.

Definition. Eine ebene, auf Bogenlänge parametrisierte Kurve $c\colon I \to \mathbb{R}^2$ sei gegeben. Ihre *Krümmung* $\kappa\colon I \to \mathbb{R}$ ist erklärt durch

$$c'' = \kappa n \qquad \Longleftrightarrow \qquad \kappa = \langle n, c'' \rangle = \langle Jc', c'' \rangle. \tag{2}$$

Deutet man c als Bewegung eines Massepunktes mit Einheitsgeschwindigkeit, so ist c'' der Beschleunigungsvektor des Massenpunktes. Die Krümmung der Bahnkurve verursacht also eine Beschleunigung $|c''|$, die proportional zur Krümmung der Kurve ist.
Wir überprüfen, dass die Krümmung die Postulate 1.) bis 3.) erfüllt.

Beispiele. 1. Für die Gerade $c(t) = tv + b$ mit $v \in \mathbb{S}^1$, $b \in \mathbb{R}^2$, gilt $c'' \equiv 0$, also auch $\kappa \equiv 0$.
2. Es sei $r \neq 0$. Dann parametrisiert

$$c\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \qquad c(t) := \left(r \cos \frac{t}{r},\, r \sin \frac{t}{r} \right).$$

einen Kreis vom Radius $|r|$ nach Bogenlänge. Das Vorzeichen von r legt die Orientierung fest: Für $r > 0$ mathematisch positiv, für $r < 0$ negativ. Wegen

$$c'(t) = \left(-\sin \frac{t}{r},\, \cos \frac{t}{r} \right) \quad \Rightarrow \quad n = Jc'(t) = \left(-\cos \frac{t}{r},\, -\sin \frac{t}{r} \right) \tag{3}$$

erhält der mathematisch durchlaufene Kreis die innere Normale, der im Uhrzeigersinn durchlaufene die äußere. Weiter ist

$$c''(t) = \left(-\frac{1}{r} \cos \frac{t}{r},\, -\frac{1}{r} \sin \frac{t}{r} \right) = \frac{1}{r} n = \kappa n$$

und somit $\kappa = \frac{1}{r}$. Insbesondere hat der positiv orientierte Kreis auch eine positive Krümmung.

Bemerkung. Das Vorzeichen der Krümmung ist positiv in Linkskurven, negativ in Rechtskurven. Wenn wir die Orientierung wechseln, also statt c die Kurve $\tilde{c}(t) := c(b - t)$ betrachten, so wechselt die Krümmung ihr Vorzeichen.

Satz 2. *(Frenet-Gleichungen ebener Kurven)*
Gegeben sei eine Parametrisierung $c\colon I \to \mathbb{R}^2$ einer ebenen Kurve auf Bogenlänge mit ihrer Normalen n. Dann gilt das System von Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} c'' &= \kappa n \\ n' &= -\kappa c'\,. \end{aligned} \tag{4}$$

Beweis. Differenziation von $n = Jc'$ liefert

$$n' = (Jc')' = Jc'' = \kappa J n = \kappa J^2 c' = -\kappa c'.$$

□

Das nichtautonome lineare System (4) nennt man auch die *Frenet-Gleichungen* einer ebenen Kurve. Es handelt sich um ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen. Bei vorgegebener Funktion κ kann man diese explizit lösen, was wir in Abschnitt 2.4 zeigen werden.

2.2. **Reguläre ebene Kurven.** Viele Kurven lassen sich nicht explizit nach Bogenlänge parametrisieren, z.B. Ellipsen. Daher benötigt man eine Formel für die Krümmung einer beliebig parametrisierten Kurve. Wir verwenden dazu Postulat 5), also die Parameterunabhängigkeit der Krümmung.

Satz 3. *(Krümmung regulärer Kurven)*
Die Krümmung $\kappa(t)$ einer ebenen regulären, durch ihre Parametrisierung $c : I \to \mathbb{R}^2$ gegebenen Kurve, berechnet sich durch

$$\kappa = \frac{1}{|c'|^3}\langle Jc', c''\rangle = \frac{1}{|c'|^3}\det(c', c''). \tag{5}$$

Beweis. Es sei $\tilde{c} = c \circ \varphi$ eine Parametrisierung der Kurve auf Bogenlänge. Nach Ketten- und Produktregel ist

$$\tilde{c}' = (c' \circ \varphi)\varphi', \qquad \tilde{c}'' = (c'' \circ \varphi)\varphi'^{\,2} + (c' \circ \varphi)\varphi''. \tag{6}$$

Unter Benutzung von $\langle Jc', c'\rangle = 0$ erhalten dann für die Krümmung

$$\kappa = \big\langle J\tilde{c}',\, \tilde{c}''\big\rangle = \big\langle Jc',\, c''\big\rangle\varphi'^{\,3}$$

Aber der Betrag von (6) liefert $1 = |c'|\varphi'$, so dass wir insgesamt den ersten Ausdruck von (5) erhalten.

Es bleibt noch die zweite Formel zu zeigen. Für jedes Paar von Vektoren $v, w \in \mathbb{R}^2$ gilt

$$\langle Jv, w\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} -v_2 \\ v_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} \right\rangle = v_1 w_2 - v_2 w_1 = \det(v, w),$$ $\square$

Beispiel. Die Parametrisierung der *Kettenlinie* $c(t) = (t, \cosh t)$ ist nicht auf Bogenlänge. Um die Krümmung zu ermitteln, berechnen wir $c'(t) = (1, \sinh t)$, $|c'| = \sqrt{1 + \sinh^2 t} = \cosh t$ sowie $c''(t) = (0, \cosh t)$. Damit ist

$$\kappa(t) = \frac{\det(c', c'')}{|c'|^3} = \frac{\cosh t}{\cosh^3 t} = \frac{1}{\cosh^2 t}\,.$$

2.3. **Raumkurven.** Kurven $c\colon I \to \mathbb{R}^n$ in höherer Dimension $n \geq 3$ bezeichnen wir als *Raumkurven*, wenn wir sie von ebenen Kurven unterscheiden wollen.

Wir nehmen im folgenden an, dass $c\colon I \to \mathbb{R}^n$ nach Bogenlänge parametrisiert ist, $|c'| \equiv 1$. Dann gilt wiederum $0 = \frac{d}{dt}|c'|^2 = 2\langle c', c''\rangle$, so dass $c'' \perp c'$.

Definition. Die *Krümmung* einer nach Bogenlänge parametrisierten Raumkurve $c\colon I \to \mathbb{R}^n$ ist gegeben durch

$$\kappa\colon I \to [0, \infty), \qquad \kappa(t) := |c''(t)|.$$

Wir bezeichnen $c''(t)$ auch als *Krümmungsvektor*. Falls $c''(t) \neq 0$, so definieren wir die *Hauptnormale* durch

$$n(t) := \frac{c''(t)}{|c''(t)|}.$$

Kurven, für die $\kappa(t) \neq 0$ für alle t gilt, nennt man *Frenet-Kurven.*

Bemerkung. Im Gegensatz zu ebenen Kurven ist die Krümmung von Raumkurven unorientiert und stets größer gleich Null. Man kann nämlich im Raum nicht zwischen "Links-Kurven" und "Rechts-Kurven" unterscheiden. Bildet man den Betrag der Krümmung einer ebenen Kurve, so erhält man die entsprechene Krümmung als Raumkurve.

Beispiel. Die Raumkurve $c(t) := (t, t^3, t^4)$ besitzt in 0 keine Hauptnormale denn $c''(0) = 0$.

Wir betrachten im Rest des Abschnitts den Fall $n = 3$ und setzen stets $\kappa(t) \neq 0$ voraus. Wir ergänzen die Vektoren $c'(t)$ und $n(t)$ durch die *Binormale*

$$b(t) := c'(t) \times n(t)\ .$$

Die Vektoren $\big(c'(t), n(t), b(t)\big)$ bilden dann für jedes $t \in I$ eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^3$ (warum?), welche man *begleitendes Dreibein* von c nennt.

Zusätzlich zur Krümmung κ besitzen Kurven im $\mathbb{R}^3$ noch eine weitere Größe, die *Torsion* (oder *Windung*)

$$\tau(t) := \langle n'(t), b(t)\rangle\ .$$

Die Torsion verschwindet genau dann in I, wenn die Kurve eben ist (Aufgabe 19). Daher misst die Torsion, wie stark sich die Kurve in den $\mathbb{R}^3$ von einer ebenen Kurve unterscheidet.

Beispiel. Jede Helix $t \mapsto (r\cos t, r\sin t, ht)$, $r > 0$, $h \in \mathbb{R}$, hat konstante Krümmung und Torsion (Aufgabe 16).

Wie im ebenen Falle erhält man ein Differentialgleichungssystem:

Satz 4. *(Frenet-Gleichungen für Raumkurven)*
Sei $c\colon I \to \mathbb{R}^3$ nach Bogenlänge parametrisierte Frenet-Kurve mit Krümmung κ und Torsion τ. Dann erfüllt das Dreibein (c', n, b) von Spaltenvektoren das Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} c'' &= \kappa n \\ n' &= -\kappa c' + \tau b \\ b' &= -\tau n \end{aligned} \tag{7}$$

Beweis. Die erste Gleichung folgt direkt aus der Definition von n und κ. Zur zweiten Gleichung: Wir stellen n' als Linearkombination von c', n und b dar

$$n' = \langle n', c'\rangle c' + \langle n', n\rangle n + \langle n', b\rangle b$$

Wir beachten $\langle n', n\rangle = 0$ wegen $|n|^2 = 1$. Weiter ist $0 = \frac{d}{dt}\langle n, c'\rangle = \langle n', c'\rangle + \langle n, c''\rangle = \langle n', c'\rangle + \kappa\langle n, n\rangle = \langle n', c'\rangle + \kappa$. Daraus folgt nun $\kappa = -\langle n', c'\rangle$ und weiter

$$n' = -\kappa c' + \tau b\ ,$$

also die zweite Gleichung. Die dritte Gleichung überlassen wir als Übungsaufgabe 19. □

Das nichtautonome lineare System (7) nennt man auch die *Frenet-Gleichungen* einer Raumkurve. Entsprechende Differentialgleichungs-Systeme erhält man auch für den Fall $n \geq 4$.

2.4. **Der Hauptsatz der Kurventheorie.** Wir kommen nun zurück zu ebenen Kurven. Wir stellen folgendes Problem: Zu gegebener Funktion $\kappa : I \to \mathbb{R}$ ist eine ebene, auf Bogenlänge parametrisierte Kurve $c : I \to \mathbb{R}^2$ gesucht, welche in jedem Punkt $t \in I$ die Krümmung $\kappa(t)$ besitzt. Da sich nach ihrer Definition die Krümmung einer Kurve aus den ersten und zweiten Ableitungen von c berechnet, werden wir die gegebene Funktion κ zweimal geeignet integrieren müssen. Wir gehen wie folgt vor:
Zunächst erklären wir eine Funktion

$$\vartheta(t) := \vartheta_0 + \int_a^t \kappa(s)ds\ , \tag{8}$$

wobei wir den Wert für $\vartheta_0 \in \mathbb{R}$ später noch festlegen werden. Als nächstes erklären wir die Kurve

$$c(t) := p + \int_a^t \begin{pmatrix} \cos\vartheta(s) \\ \sin\vartheta(s) \end{pmatrix} ds \tag{9}$$

wobei hier $p \in \mathbb{R}^2$ ein fester Punkt ist. Es folgt $c'(t) = (\cos\vartheta(t), \sin\vartheta(t))$, also $|c'(t)| = 1$. Somit ist c eine auf Bogenlänge parametrisierte Kurve. Weiter ist

$$c''(t) = \vartheta'(t)\begin{pmatrix} -\sin\vartheta(t) \\ \cos\vartheta(t) \end{pmatrix} = \kappa(t)\begin{pmatrix} -\sin\vartheta(t) \\ \cos\vartheta(t) \end{pmatrix} = \kappa(t)Jc'(t)\ .$$

Wir berechnen die Krümmung $\tilde{\kappa}(t)$ der Kurve c und erhalten

$$\tilde{\kappa}(t) = \langle Jc', c''\rangle = \kappa(t)\langle Jc', Jc'\rangle = \kappa(t)\langle c', c'\rangle = \kappa(t)\ .$$

Also besitzt die Kurve c tatsächlich die vorgeschriebene Krümmung $\kappa(t)$!

Satz 5. *(Hauptsatz für ebene Kurven)*
Gegeben seien $\kappa\colon I \to \mathbb{R}$ glatt (genauer C^1), $p \in \mathbb{R}^2$, $v \in \mathbb{S}^1$, und $a \in I$. Dann gibt es genau eine nach Bogenlänge parametrisierte ebene Kurve $c\colon I \to \mathbb{R}^2$, die in jedem $t \in I$ die Krümmung $\kappa(t)$ besitzt und sowie die Anfangswerte $c(a) = p$, $c'(a) = v$ besitzt. Diese ist gegeben durch (8) und (9).

Beweis. 1.) Zur Existenz: Wir erklären die Kurve $c(t)$ gemäß (8) und (9), wobei wir $\vartheta_0 \in [0, 2\pi)$ so wählen, dass $(\cos\vartheta_0, \sin\vartheta_0) = v$ gilt. Dieses $c(t)$ besitzt die gewünschten Eigenschaften.
2.) Zur Eindeutigkeit: Es sei $\tilde{c}$ eine beliebige, nach Bogenlänge parametrisierte Lösung des Satzes zusammen mit ihrer Normalen $\tilde{n}$. Dann müssen $(\tilde{c}, \tilde{n})$ die Frenet-Gleichungen (4) erfüllen. Dieses System gewöhnlicher Differentialgleichungen ist jedoch unter Vorgabe der Anfangswerte $\tilde{c}(a) = p$, $\tilde{c}'(a) = v$ und $\tilde{n}(a) = J\tilde{c}'(a) = Jv$ bereits eindeutig lösbar (Satz von Picard-Lindelöff), also stimmen $\tilde{c}$ und c überein. $\square$

Aus dem Satz folgt: Geraden und Kreise sind die einzigen ebenen Kurven, welche konstante Krümmung besitzen.

Bemerkungen. 1.) Die Funktion $\vartheta(t)$ wird der (stetig fortgesetzte) Tangentenwinkel bezeichnet. Sie gibt den Winkel zwischen der Tangente $c'(t)$ dem Vektor $e_1 = (1, 0)$ an.
2.) Für Raumkurven gibt es ebenfalls einen Hauptsatz, d.h. zu vorgegebener Krümmung und Torsion gibt es eine Kurve in $\mathbb{R}^3$; sie ist eindeutig bestimmt bis auf Bewegungen (oder durch entsprechende Anfangsbedingungen). Also sind beispielsweise Helices die einzigen Kurven mit konstanter Krümmung und Torsion. Weil man keinen Tangentenwinkel $\vartheta(t)$ mehr zur Verfügung hat, muss man das Differentialgleichungssystem (7) mit einem abstrakten Satz lösen: Das Problem wird auf den Satz von Picard-Lindelöf zurückgeführt (siehe [B], S.70ff).
3. (vgle. Spallek [Sp] S. 57/58]) Straßenkurven werden mit κ stückweise linear in t trassiert, damit beim Autofahren der Lenkradeinschlag zu einer stetigen Funktion der Zeit wird. Nach Satz 5 existieren Kurven c mit κ linear; sie heissen *Klothoiden* oder Straßenbauer-Spiralen und sind nicht elementar integrierbar (siehe Aufgabe 10). Sie werden so aneinander gesetzt, dass die entstehende Kurve, also die Straße, der Klasse C^2 angehört. Bis 1937 wurden Straßen offenbar nur als C^1-Kurven trassiert. Im Eisenbahnbau hat man bereits länger C^2-Kurven verwendet, jedoch arbeitet man mit Stücken kubischer Parabeln. Im allgemeinen muss man mit Raumkurven arbeiten.

`3. Vorlesung, Mittwoch 2.5.07` ______

3. Vier Charakterisierungen der Krümmung

Wir geben nun einige Eigenschaften von Kurven an, für die die Krümmung wesentlich ist. Diese Eigenschaften sind lokal, d.h. durch die Kenntnis der Kurve in einer Umgebung eines Punktes bestimmt. Wir beschränken uns auf ebene Kurven.

3.1. **Graphen und lokale Normalform.** Es sei $P \in \mathbb{R}^2$ ein Punkt und $T, N \in \mathbb{S}^1$ zwei Vektoren mit $N = JT$. Weiter sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine glatte Funktion. Dann betrachten wir die spezielle Parametrisierung einer Kurve

$$c(t) := P + tT + f(t)N$$

und nennen c den Graphen der Funktion f über der Geraden $g := \{P + tT \mid t \in \mathbb{R}\}$.

Beispiel. Setzt man $P = (0,0)$, $T := (1,0)$ und $N = (0,1)$, so erhält man $c(t) = (t, f(t))$, also einen Graphen über der x-Achse.

Wir wollen nun die Krümmung einer solchen Kurve berechnen. Es ist

$$c'(t) = T + f'(t)N \quad , \quad c''(t) = f''(t)N$$

und es folgt

$$\begin{aligned}\kappa(t) &= \frac{1}{|c'|^3}\langle Jc', c''\rangle = \frac{1}{|T + f'N|^3}\langle JT + f'\,JN, f''\,N\rangle \\ &= \frac{1}{|T + f'N|^3}\langle N - f'\,T, f''\,N\rangle = \frac{f''}{|T + f'N|^3}\end{aligned}$$

Insbesondere gilt für die Krümmung

$$f'(t_0) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \kappa(t_0) = f''(t_0) \tag{10}$$

Wir zeigen nun, dass man zumindest lokal jede Kurve als Graph über der Tangentialgeraden darstellen kann.

Satz 6. *(Lokale Normalform)*
Es sei eine reguläre Kurve $c\colon I \to \mathbb{R}^2$ gegeben. Im Punkt $P = c(t_0)$ habe c die Tangente $T := \frac{c'(t_0)}{|c'(t_0)|}$ und die Normale $N := JT$. Sei ferner κ die Krümmung von c im Punkt t_0. Dann gibt es eine orientierungserhaltende Parametertransformation $\varphi\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to I$ mit $\varphi(0) = t_0$, so dass $\tilde{c} := c \circ \varphi$ die lokale Normalform *besitzt*

$$\tilde{c}(t) = P + tT + \frac{1}{2}\kappa t^2 N + O(t^3)N, \qquad -\varepsilon < t < \varepsilon. \tag{11}$$

Überlegen Sie: Kann die Darstellung $\tilde{c}$ eine Parametrisierung nach Bogenlänge sein?

Beweis. Wir betrachten die orthogonale Zerlegung des Vektors $c(s) - P$ als

$$c(s) - P = h(s)T + f(s)N$$

mit $h(s) = \langle c(s) - P, T\rangle$ und $f(s) = \langle c(s) - P, N\rangle$. Einsetzen von $s = \varphi(t)$ liefert dann

$$\tilde{c}(t) - P = h \circ \varphi(t)T + f \circ \varphi(t)N\ .$$

Um (11) zu erreichen, muss $h \circ \varphi(t) = t$ gelten, also $\varphi := h^{-1}$. Es existiert h^{-1} auch lokal um $h(t_0) = 0$, denn $h'(t_0) = \langle c'(t_0), T\rangle = |c'(t_0)| > 0$.

Setzen wir nun $\tilde{f}(t) := f \circ \varphi(t)$, so ist

$$\tilde{c}(t) = P + tT + \tilde{f}(t)N, \qquad -\varepsilon < t < \varepsilon. \tag{12}$$

Offenbar gilt $\tilde{f}(0) = 0$ und

$$\tilde{f}'(0) = \big\langle c'(\varphi(0))\varphi'(0), N\big\rangle = \varphi'(0)\big\langle c'(t_0), N\big\rangle = 0.$$

Die Taylorreihe von f lautet also

$$\tilde{f}(t) = \tilde{f}(0) + t\tilde{f}'(0) + \frac{1}{2}t^2\tilde{f}''(0) + O(t^3) \overset{(10)}{=} \frac{1}{2}t^2\kappa + O(t^3).$$

Einsetzen in (12) ergibt (11). □

Wir können aus (11) beispielsweise ablesen:

Korollar 7. *(Lokale Konvexität)*
Ist $\kappa(t_0) \neq 0$, so liegt die Kurve c in einer Umgebung von t_0 auf einer Seite der Tangentialgeraden $g := \{c(t_0) + s\,c'(t_0) \mid s \in \mathbb{R}\}$ d.h. für sämtliche t mit $0 < |t - t_0| < \varepsilon$ gilt entweder $\big\langle c(t) - c(t_0), n(t_0)\big\rangle > 0$ oder < 0.

Tatsächlich ist für eine eingebettete geschlossene Kurve sogar äquivalent: Das von der Kurve links berandete Gebiet ist konvex $\Leftrightarrow$ $\kappa(t) \geq 0$ für alle t (siehe Übung 15).

Bemerkung. Für reguläre Raumkurven gibt es eine entsprechende Normalform. Setzt man $T := \frac{c'(t_0)}{|c'(t_0)|}$ und $N := \frac{c''(t_0)}{|c''(t_0)|}$, so findet man wie zuvor eine Umparametrisierung mit

$$\tilde{c}(t) = P + tT + \frac{1}{2}\kappa t^2 N + O(t^3); \tag{13}$$

allerdings steht $O(t^3) \in T^\perp \subset \mathbb{R}^n$ diesmal für einen Vektor.

3.2. **Krümmung als inverser Radius des Schmiegkreises.** Wir wollen das zu Beginn von Abschnitt 2 genannte Postulat 4 (Krümmung in einem Punkt = Krümmung des bestapproximierenden Kreises in diesem Punkt) nachprüfen.

Mit Hilfe der lokalen Normalform beweisen wir folgendes:

Lemma 8. *Ist $\kappa(t_0) \neq 0$, so existiert ein $\varepsilon > 0$ mit folgender Eigenschaft: Für jedes Tripel $t_1 < t_2 < t_3$ in $(t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$ liegen die drei Punkte $c(t_1), c(t_2), c(t_3)$ nicht auf einer Geraden.*

Beweis. Mit Satz 6 können wir (nach Umparametrisierung) $c(t) = P + tT + f(t)N$ für $t \in (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$ schreiben. Wegen $f'(t_0) = 0$ ist $f''(t_0) = \kappa(t_0) \neq 0$ nach Voraussetzung. Wegen der Stetigkeit von f'' können wir dann $f''(t) \neq 0$ voraussetzen (nach eventueller Verkleinerung von $\varepsilon > 0$). Angenommen, die Punkte $c(t_1)$, $c(t_2)$, $c(t_3)$ liegen auf einer Geraden. Dann liegen ebenfalls die Punkte $(t_1, f(t_1))$, $(t_2, f(t_2))$ und $(t_3, f(t_3))$ auf einer

Geraden (warum?). Nach zweimaliger Anwendung des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung (Details in Übungsaufgabe 13) gibt es dann eine Zwischenstelle t_* mit $f''(t_*) = 0$, also ein Widerspruch. □

Unter den Voraussetzungen des Lemmas sei $K(t_1, t_2, t_3)$ der Kreis durch die Punkte $c(t_1)$, $c(t_2)$, $c(t_3)$; wir benötigen nur seinen Mittelpunkt $M(t_1, t_2, t_3)$. Wir wollen den am besten approximierenden Kreis nun als Grenzwert dieser Kreise definieren; dabei wollen wir sagen, dass eine Folge von Kreisen konvergiert, wenn Mittelpunkte und Radien konvergieren.

Satz 9. *(Existenz des Krümmungskreises)*
Es sei c nach Bogenlänge parametrisiert und $c''(t_0) \neq 0$. Dann existiert der Grenzwert

$$K(t_0) = \lim_{t_1,t_2,t_3 \to t_0} K(t_1, t_2, t_3),$$

der sogenannte Schmieg- *oder* Krümmungskreis *von c in t_0. Er hat den Mittelpunkt*

$$M(t_0) := \lim_{t_1,t_2,t_3 \to t_0} M(t_1, t_2, t_3) \;=\; c(t_0) + \frac{c''(t_0)}{|c''(t_0)|^2}.$$

und damit den Radius $\frac{1}{|c''(t_0)|} = \frac{1}{|\kappa(t_0)|}$.

Beweis. Wir wählen ε wie im Lemma. Für $t_1 < t_2 < t_3$ in $(t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$ betrachten wir die Funktion $h(t) := \frac{1}{2}\big|c(t) - M(t_1, t_2, t_3)\big|^2$. Sie erfüllt $h(t_1) = h(t_2) = h(t_3)$, weil die drei Punkte $c(t_i)$ auf dem Kreis liegen. Der Mittelwertsatz liefert dann zwei ξ_1, ξ_2 mit $t_1 < \xi_1 < t_2 < \xi_2 < t_3$, sodass

$$0 = h'(\xi_k) = \Big\langle c'(\xi_k), c(\xi_k) - M(t_1, t_2, t_3)\Big\rangle \quad k = 1, 2 \;.$$

Erneute Anwendung des Mittelwertsatzes liefert ein $\eta \in (\xi_1, \xi_2)$ mit

$$0 = h''(\eta) = \big\langle c''(\eta),\, c(\eta) - M(t_1, t_2, t_3)\big\rangle + \underbrace{|c'(\eta)|^2}_{=1}.$$

Für $t_1, t_2, t_3 \to t_0$ gehen dann auch ξ_k und η gegen t_0. Die letzten beiden Gleichungen ergeben

$$\big\langle c'(t_0),\, c(t_0) - M(t_0)\big\rangle = 0 \quad \text{und} \quad \big\langle c''(t_0),\, c(t_0) - M(t_0)\big\rangle = -1.$$

Wegen $c'(t_0) \perp c''(t_0)$ ist der Grenzwert $M(t_0)$ eindeutig festgelegt und berechnet sich, wie gewünscht, durch $c(t_0) - M(t_0) = -\frac{c''(t_0)}{|c''(t_0)|^2}$. □

Wir verzichten hier auf die Behandlung des Falles $c''(t_0) = 0$.

Bemerkung. Entsprechend kann man Raumkurven durch einen Krümmungskreis im Raum approximieren; man muss dann die Normalform (13) benutzen.

3.3. **Länge von Parallelkurven.** Ist $c\colon I \to \mathbb{R}^2$ eine parametrisierte Kurve, so nennen wir die parametrisierte Kurve

$$c_d(t) := c(t) + dn(t)$$

eine *Parallelkurve* zu c im Abstand $d \in \mathbb{R}$.

Beispiel. Ein positiv orientierter Kreis vom Radius r hat als Parallelkurven Kreise vom Radius $|r-d|$ (für $d = r$ ist dies ein Punkt).

Ist c regulär, so hat die Parallelkurve den Tangentenvektor

$$c_d' = c' + dn' = (1 - d\kappa)c'. \tag{14}$$

Gilt also $1 - d\kappa(t) \neq 0$ für alle $t \in I$, so ist auch c_d regulär.

Wir verlangen von nun an für t, d die stärkere Bedingung

$$1 - d\kappa(t) > 0. \tag{15}$$

Aus (14) folgt $Jc_d' \parallel Jc'$; gilt zusätzlich (15), so zeigen beide Vektoren in die gleiche Richtung. Also folgt

$$n_d(t) = n(t) \qquad \text{für alle } t \in I$$

und die Normalen ändern sich beim Übergang zu jeder Parallelkurve c_d nicht. Weiterhin folgt aus (15), dass $|c_d'| = (1 - d\kappa)|c'|$, was durch Integration ergibt:

Satz 10. *(Länge von Parallelkurven)*
Sei $c\colon [a,b] \to \mathbb{R}^2$ nach Bogenlänge parametrisiert. Es sei $d \in \mathbb{R}$ so gewählt, dass (15) *für alle $t \in I$ gilt. Dann besitzen die Parallelkurven $c_d(t) = c(t) + dn(t)$ die Länge*

$$L(c_d) = L(c) - d\int_a^b \kappa(t)\,dt. \tag{16}$$

Insbesondere ist Funktion $d \mapsto L(c_d)$ linear! Um die Krümmung zu messen, genügt es damit, das Längenelement von Parallelkurven zu bestimmen; genauer gesagt

$$\kappa(a) = \lim_{\substack{b \to a \\ b > a}} \frac{1}{b-a}\int_a^b \kappa(t)dt = \lim_{\substack{b \to a \\ b > a}} \frac{1}{(b-a)d}(L(c) - L(c_d))\ .$$

`4. Vorlesung, Mittwoch 9.5.07` ______________________________

3.4. **Die Ableitung des Tangentenwinkels und Umlaufzahl.** Gegeben sei eine auf Bogenlänge parametrisierte, glatte Kurve $c : I \to \mathbb{R}^2$. Dann gibt es gemäß Satz 5 eine glatte Funktion $\vartheta : I \to \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft

$$c'(t) = (\cos\vartheta(t), \sin\vartheta(t))\ .$$

Diese Funktion nennt man den (stetig fortgesetzten) Tangentenwinkel, da $\vartheta(t)$ den Winkel zwischen $c'(t)$ und $e_1 = (1, 0)$ mißt. Differenzieren wir c' nochmals, so ergibt sich

$$c''(t) = \vartheta'(t)(-\sin\vartheta(t), \cos\vartheta(t)) = \vartheta'(t)n(t)\ .$$

Da aber auch $c''(t) = \kappa(t)n(t)$ gilt, folgt

$$\vartheta'(t) = \kappa(t)\ . \tag{17}$$

Wir erhalten folgende Charakterisierung: Die Krümmung einer Kurve gibt die Geschwindigkeit der Rotation des Tangentenvektors an.

Definition. Eine parametrisierte Kurve $c\colon [a, b] \to \mathbb{R}^n$ heißt *geschlossen*, wenn

$$c(a) = c(b), \quad c'(a) = c'(b), \quad c''(a) = c''(b), \quad \dots,$$

d.h. wenn in den Endpunkten alle Ableitungen übereinstimmen. Für eine glatte, geschlossene reguläre Kurve $c\colon [a, b] \to \mathbb{R}^2$ mit Krümmung $\kappa(t)$ nennen wir

$$n_c := \frac{1}{2\pi}\int_a^b \kappa(s)|c'(s)|ds = \frac{1}{2\pi}\int_a^b \frac{\det(c', c'')}{|c'|^2}ds \tag{18}$$

die *Umlaufzahl* von c.

Klarer wäre es vielleicht, *Tangentendrehzahl* zu sagen. Die Umlaufzahl gibt nämlich an, wie oft sich die Tangente bei Durchlauf der Kurve um sich selbst dreht.

Beispiele. 1. Es sei $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Dann hat der k-fach durchlaufene Kreis $c\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $c(t) := e^{ikt}$, die Umlaufzahl k.
2. Die *Lemniskate* $c\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ mit $c(t) := (\sin t, \sin 2t)$ hat die Umlaufzahl 0.

In diesen Beispielen ist die Umlaufzahl ganzzahlig. Dies ist tatsächlich immer so, wie folgendes Lemma zeigt.

Lemma 11. *Die Umlaufzahl einer geschlossenen Kurve ist unabhängig von ihrer Parametrisierung und stets eine ganze Zahl.*

Beweis. 1.) die Parameterunabhängigkeit: Es seien c sowie $\tilde{c} = c \circ \varphi$ zwei Parametrisierungen der Kurve und φ ein Diffeomorphismus. Dann liefert die Substitutionsregel

$$2\pi\, n_{\tilde{c}} = \int \tilde{\kappa}(s)|\tilde{c}'(s)|ds = \int \kappa(\varphi(s))|c'(\varphi(s))|\varphi'(s)ds = \int \kappa(t)|c'(t)|dt = 2\pi\, n_c\ .$$

Dabei haben wir der Einfachheit halber die Integrationsgrenzen weggelassen.
2.) die Ganzzahligkeit: Wegen der 1.) reicht es aus, diese im Falle einer Parametrisierung $c : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ auf Bogenlänge zu zeigen. Es sei $\vartheta(t)$ der Tangentenwinkel von c. Aus (17) folgern wir

$$n_c = \frac{1}{2\pi}\int_a^b \kappa(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_a^b \vartheta'(t)dt = \frac{1}{2\pi}(\vartheta(b) - \vartheta(a)) .$$

Da c geschlossen ist, gilt

$$(\cos\vartheta(a), \sin\vartheta(a)) = c'(a) = c'(b) = (\cos\vartheta(b), \sin\vartheta(b))$$

Daraus folgern wir $\vartheta(b) - \vartheta(a) = 2\pi k$ für ein $k \in \mathbb{Z}$ und weiter $n_c = k \in \mathbb{Z}$. □

Bemerkung. Für Kurven im Raum hat man ein Analogon zur Umlaufzahl, die sogenannte Totalkrümmung $T(c) := \int \kappa|c'|dt$. Da jedoch $\kappa \geq 0$ für Raumkurven gilt, ist diese stets positiv. Im Allgemeinen ist sie auch kein ganzzahliges Vielfaches von 2π, sondern kann jede positive reelle Zahl annehmen. Wenn c verknotet ist, gilt übrigens $T(c) \geq 4\pi$ (Satz von Fary-Milnor, siehe z.B. Spivak [Sp], vol.III, p. 428).

4. Globale Kurventheorie

4.1. **Die Windungszahl geschlossener, ebener Kurven.** In diesem Abschnitt identifizieren wir die Ebene $\mathbb{R}^2$ mit den komplexen Zahlen $\mathbb{C}$. Wir fragen: Wie oft läuft eine geschlossene orientierte Kurve $c : I \to \mathbb{C}$ um einen Punkt $p \notin c(I)$? Die Antwort liefert die Windungszahl.

Definition. Es sei $c : I \to \mathbb{C}$ eine geschlossene und glatte (hier C^1)-Kurve und $p \notin c(I)$. Dann erklären wir die *Windungszahl von c um p* als

$$W(c, p) := \frac{1}{2\pi i}\int_a^b \frac{c'(t)}{c(t) - p}dt \in \mathbb{C} .$$

Bemerkung. 1.) Die Kurven brauchen an dieser Stelle nicht regulär zu sein, es ist also $c'(t) = 0$ auch erlaubt.
2.) Man zeigt leicht, dass auch die Windungszahl unabhängig von der gewählten Parametrisierung der Kurve ist. Der Beweis erfolgt analog zum Beweis der Parameterunabhängigkeit der Umlaufzahl (Lemma 11).
3.) Die Windungszahl kann gemäß ihrer Definition eine beliebige komplexe Zahl sein. Tatsächlich ist sie aber immer eine ganze Zahl, was wir gleich zeigen werden. Zunächst ein

Beispiel. 1.) Eine konstante Kurve $c(t) \equiv q$ für ein $q \in \mathbb{C}$ besitzt die Windungszahl $W(c, p) = 0$ für jedes $p \neq q$.

2.) Der k-fach positiv umlaufene Kreis $c(t) := \cos t + i \sin t = e^{it}$ für $t \in [0, 2\pi k]$ besitzt bez. 0 die Windungszahl k, denn

$$W(c,0) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi k} \frac{c'(t)}{c(t)} dt = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi k} \frac{ie^{it}}{e^{it}} dt = \frac{2\pi k i}{2\pi i} = k \ .$$

Wir kommen nun zu

Lemma 12. *(Ganzzahligkeit der Windungszahl)*
Gegeben sei $I = [a,b]$ und eine glatte geschlossene Kurve $c : I \to \mathbb{C}$ mit $p \notin c(I)$. Dann ist die Windungszahl $W(c,p)$ ganzzahlig.

Beweis. Wir betrachten die Hilfsfunktion

$$\Phi(t) := (c(t) - p) \exp\Big(\int_a^t \frac{-c'(s)}{c(s) - p} ds \Big)$$

für $t \in I$, wobei exp die komplexe Exponentialfunktion bezeichne. Wir berechnen

$$\Phi'(t) = \exp\Big(\int_a^t \frac{-c'(s)}{c(s) - p} ds \Big) \Big(c'(t) + (c(t) - p) \frac{-c'(t)}{c(t) - p} \Big) = 0 \ .$$

Die Funktion Φ ist also in I konstant und es folgt

$$\Phi(a) = c(a) - p = \Phi(b) = (c(b) - p) \exp\Big(- 2\pi i W(c,p) \Big)$$

Da nun c geschlossen, ist $c(b) = c(a)$ und somit $\exp(-2\pi i \, W(c,p)) = 1$. Daraus folgern wir $W(c,p) \in \mathbb{Z}$, denn alle komplexen Lösungen $z \in \mathbb{C}$ der Gleichung $\exp(2\pi i z) = 1$ sind ganzzahlig (siehe Vorlesung Analysis oder Funktionentheorie). $\square$

Bemerkung. Mit Hilfe der Ganzzahligkeit der Windungszahl kann man folgende Darstellung der Windungszahl zeigen (Übungsaufgabe)

$$W(c,0) = \frac{1}{2\pi} \int_a^b \frac{\det(c, c')}{|c|^2} dt \ ,$$

indem man den Imaginäranteil der komplexen Zahl $\int \frac{c'(t)}{c(t)} dt$ ermittelt. Durch Vergleich mit der Definitition der Umlaufzahl (18) erhält man folgenden Zusammenhang zwischen *Windungszahl und Umlaufzahl*: Die Umlaufzahl n_c einer Kurve c stimmt überein mit der Windungszahl der Kurve c' um 0.

Es ist im Allgemeinen recht schwierig, die Windungszahl mittels ihrer Definition als Integral zu berechnen. Um die Windungszahl trotzdem ermitteln zu können, hilft das folgende

Lemma 13. *(Homotopie-Lemma)*
Zu $I = [a,b]$ sei $c_r : I \to \mathbb{C}$ eine Familie von glatten, geschlossenen Kurven, sodass c und seine Ableitung c' stetig vom Parameter $r \in [r_0, r_1]$ abhängen. Ferner sei ein $p \in \mathbb{C}$ gewählt mit $c_r(t) \neq p$ für alle $t \in I$ und $r \in [r_0, r_1]$. Dann ist die Windungszahl $W(c_r, p)$ konstant als Funktion von r.

Beweis. Nach ihrer Definition ist

$$W(c_r, p) = \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{c_r'(t)}{c_r(t) - p} dt \,.$$

Da nun der Integrand stetig vom Parameter r abhängt, ist ebenfalls die Funktion $r \mapsto W(c_r, p)$ stetig in r. Da diese Funktion aber ganzzahlig ist, ist sie konstant für $r \in [0,1]$. □

Beispiel. Die Ellipse $c(t) = \cos t + ib \sin t$ für $r \in [0, 2\pi]$ und $b > 0$ hat die Windungszahl $W(c, 0) = 1$. Betrachte die Homotopie $c_r(t) := \cos t + i(rb + 1 - r)\sin t$, $r \in [0,1]$. Wir erhalten $c_1(t) = c(t)$ sowie $c_0(t) = \cos t + i \sin t$. Es ist c_0 der einfach positiv durchlaufene Kreis mit $W(c_0, 0) = 1$ (siehe obiges Beispiel). Nach dem Homotopie-Lemma gilt ebenfalls $W(c_1, 0) = W(c, 0) = 1$.

4.2. **Anwendung der Windungszahl: Fundamentalsatz der Algebra und Brouwerscher Fixpunktsatz.**
Wir möchten in diesem Abschnitt die Windungszahl verwenden, um den Fundamentalsatz der Algebra sowie den Brouwerschen Fixpunktsatz zu beweisen. Bestimmt haben Sie schon Beweise des einen oder des anderen Satzes gesehen, aber wahrscheinlich mittels anderer Beweismethoden. Wir benötigen zunächst

Lemma 14. *(Nullstellen-Lemma)*
Auf der Kreisscheibe

$$B_R := \{z \in \mathbb{C} \ : \ |z| \le R\}$$

mit Radius $R > 0$ sei eine Funktion $f \in C^1(B_R, \mathbb{C})$ gegeben, sodass ihre Randabbildung $c(t) := f(Re^{it})$ für $t \in [0, 2\pi]$ die Eigenschaften

$$c(t) \neq 0 \quad \text{in } [0, 2\pi] \quad , \quad W(c, 0) \neq 0$$

erfülle. Dann besitzt f eine Nullstelle, d.h. es existiert ein $z_0 \in B_R$ mit $f(z_0) = 0$.

Beweis. Angenommen, f hat keine Nullstelle. Dann betrachte die folgende Schar von geschlossenen Kurven

$$c_r(t) : [0, 2\pi] \to \mathbb{C} \quad , \quad c_r(t) := f(re^{it}) \quad t \in [0, 2\pi] \ , \ r \in [0, R] \,.$$

Da wir voraussetzen, dass f keine Nullstelle hat, gilt $c_r(t) \neq 0$ für alle $t \in [0, 2\pi]$ und $r \in [0, R]$. Nach dem Homotopie-Lemma ist dann die Windungszahl $W(c_r, 0)$ konstant. Andererseits ist $W(c_R, 0) = W(c, 0) \neq 0$ nach Voraussetzung des Satzes und $W(c_0, 0) = 0$, da $c_0(t) \equiv f(0)$ ist, also ein Widerspruch. □

Satz 15. *(Fundamentalsatz der Algebra)*
Es sei

$$p(z) = z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$$

ein Polynom in $\mathbb{C}$ vom Grade $n \geq 1$ mit Koeffizienten $a_{n-1}, \ldots, a_0 \in \mathbb{C}$. Dann hat p eine Nullstelle.

Beweis. Wir können zunächst ein $R > 0$ hinreichend groß wählen, dass

(19) $$|z^n| > |a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0| \quad \text{für alle} \quad z \in \mathbb{C} \text{ mit } |z| = R$$

gilt. Wir betrachten wir nun die Schar von Polynomen

$$p_r(z) := z^n + r\Big(a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0\Big) \quad z \in \mathbb{C}\ ,\ r \in [0,1]$$

und beachten $p_1(z) = p(z)$. Weiter betrachten wir die Randwerte

$$c_r(t) : [0, 2\pi] \to \mathbb{C} \quad , \quad c_r(t) := p_r(Re^{it}) \quad t \in [0, 2\pi]\ ,\ r \in [0,1]\ ,$$

welche wegen (19) $c_r(t) \neq 0$ erfüllen. Wir berechnen die Windungszahl

$$W(c_0, 0) = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{c_0'(t)}{c_0(t)}dt = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{inR^n e^{int}}{R^n e^{int}}dt = \frac{2\pi i n}{2\pi i} = n\ .$$

Das Homotopie-Lemma liefert dann ebenfalls $W(c_1, 0) = n$. Mit Hilfe des Nullstellen-Lemmas erhalten wir eine Nullstelle des Polynomes $p_1(z) = p(z)$. □

`5. Vorlesung, Mittwoch 16.5.07` ________________

Satz 16. *(Brouwerscher Fixpunktsatz)*
Zu $R > 0$ sei eine stetige Funktion $f : B_R \to B_R \in C^0(B_R, B_R)$ gegeben. Dann hat f einen Fixpunkt, d.h. es existiert ein $z_0 \in B_R$ mit $f(z_0) = z_0$.

Beweis. 1.) Wir beweisen den Satz zunächst für differenzierbare Funktionen $f \in C^1(B_R, B_R)$. Wir betrachten die Schar von Funktionen

$$f_r(z) := z - rf(z) \quad \text{für } z \in B_R$$

mit der Eigenschaft

(20) $$|f_r(z)| \geq |z| - r|f(z)| = R - r|f(z)| > 0 \quad \text{für } |z| = R\ ,\ r \in [0,1)\ .$$

Weiter seien die Randwerte

$$c_r(t) := f_r(Re^{it}) \quad \text{für } t \in [0, 2\pi]\ ,\ r \in [0,1)$$

erklärt, welche wegen (20) $c_r(t) \neq 0$ für $r \in [0,1)$ erfüllen. Aus $W(c_0, 0) = 1$ zusammen mit dem Homotopie-Lemma folgern wir $W(c_r, 0) = 1$ für alle $r \in [0,1)$. Wir betrachten nun die eine Folge $r_n \in (0,1)$ mit $r_n \to 1$ für $n \to \infty$. Das Nullstellen-Lemma liefert zu jedem n komplexe Zahl $z_n \in B_R$ mit

$$f_{r_n}(z_n) = 0 = z_n - r_n f(z_n)\ .$$

Nach Auswahl einer konvergenten Teilfolge können wir die Konvergenz $z_n \to z_0$ für $n \to \infty$ annehmen, wobei $z_0 \in B_R$ ist. Aus der Stetigkeit von f folgt dann

$$0 = \lim_{n\to\infty} \Big(z_n - r_n f(z_n) \Big) = z_0 - f(z_0) \ .$$

Also ist z_0 der gesuchte Fixpunkt.

2.) Um nun den Satz auch für stetiges $f \in C^0(B_R, B_r)$ zu beweisen, approximieren wir dieses mittels Weierstraßschem Approximationssatzes durch eine Folge von Funktionen $f_n \in C^1(B_R, B_R)$, welche in B_R gleichmäßig gegen f konvergieren. Wegen 1.) existiert eine Folge $z_n \in B_R$ von Fixpunkten mit $f_n(z_n) = z_n$. Nach Auswahl einer konvergenten Teilfolge können wir $z_n \to z_0$ mit $z_0 \in B_R$ annehmen. Für $n \to \infty$ liefert die gleichmäßige Konvergenz von f_n dann $f(z_0) = z_0$, den gesuchten Fixpunkt. □

Bemerkung.
1.) Der Brouwersche Fixpunkt gilt nicht nur im $\mathbb{R}^2$ sondern auch im $\mathbb{R}^n$. Einen Beweis findet man in [Sa] mittels des Brouwerschen Abbildungsgrades in $\mathbb{R}^n$, einer Verallgemeinerung der hier vorgestellten Windungszahl.
2.) Der Beweis des Brouwerschen Fixpunktsatzes ist nichtkonstruktiv, sondern basiert auf einem Widerspruchsargument welches im Beweis des Nullstellen-Lemmas enthalten ist. Dies ist ein Unterschied zum Banachschen Fixpunktsatz, welcher gleich eine Konstruktionsvorschrift mitliefert (die Fixpunktiteration $z_{n+1} = f(z_n)$).
3.) Der Fixpunkt dieses Satzes ist im Allgemeinen nicht eindeutig. Es ist sogar möglich, dass unendlich viele Fixpunkte existieren. Dies ist ebenfalls ein Unterschied zum Banachschen Fixpunktsatz, bei welchen der Fixpunkt eindeutig ist.

4.3. **Die isoperimetrische Ungleichung.** Es sei $M \subset \mathbb{R}^2$ eine abgeschlossene, beschränkte Menge. Ihre Randkurve ∂M besitze eine Parametrisierung c auf Bogenlänge, d.h. es gilt

$$c(t) = (x(t), y(t)) : [0, L] \to \partial M \quad \text{bijektiv mit } |c'(t)| = 1 \ . \tag{21}$$

Dabei ist L die Länge der Randkurve. Die Orientierung von c sei so gewählt, dass c' die in M hineinzeigende Normale ist. Weiter bezeichne A den Flächeninhalt von M.

Wir stellen das *isoperimetrische Problem* : Man finde bei fest vorgegebenem Flächeninhalt ein Gebiet, welches den geringsten Umfang besitzt.
Dieses Problem lösen wir mittels der der *isoperimetrische Ungleichung*

$$L^2 \geq 4\pi A \ . \tag{22}$$

Man beachte, dass der Kreis $B_r = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 \leq r^2\}$ diese Ungleichung mit Gleichheit erfüllt ist, denn hier ist $L = 2\pi r$ und $A = \pi r^2$, also $L^2 = 4\pi^2 r^2 = 4\pi A$.

Folgerung: Der Kreis löst das isoperimetrische Problem, er hat unter allen einfach geschlossenen Kurven mit demselben festen Flächeninhalt die die minimale Länge.

Zum Beweis der isoperimetrischen Ungleichung benötigen wir zunächst eine Formel, welche den Flächeninhalt berechnet.

Lemma 17. *Unter den Voraussetzungen (21) gilt für den Flächeninhalt A die Gleichung*

$$A = \int_0^L x(t)y'(t)dt \ .$$

Beweis. Es gilt folgende Rechnung

$$\begin{aligned} A &= \int_M 1\, dxdy \qquad \text{(Definition Flächeninhalt)} \\ &= \frac{1}{2}\int_M \operatorname{div}(x,y)\, dxdy \\ &= \frac{1}{2}\int_{\partial M} (x,y)\cdot(y',-x')dS \qquad \text{(Integralsatz von Gauss, } (y',-x') \text{ äußere Normale)} \\ &= \frac{1}{2}\int_0^L (xy'-x'y)dt \qquad \text{(Parametrisierung von } \partial M \text{ eingesetzt)} \\ &= \frac{1}{2}\int_0^L xy'\, dt - \frac{1}{2}\Big|xy\Big|_0^L + \frac{1}{2}\int_0^L xy'\, dt \qquad \text{(partielle Integration)} \\ &= \int_0^L xy'\, dt \ . \end{aligned}$$

□

Wir kommen nun zum Beweis der isoperimetrischen Ungleichung.

Beweis. 1.) Die geschlossene Kurve $c(t) = (x(t), y(t))$ sei gegeben. Die Funktion $x(t)$ nehme in t_1 ihr Minimum und in t_2 ihr Maximum an. Wir können ohne Einschränkung $t_1 \le t_2$ annehmen. Da sich Flächeninhalt und Länge unter Translation nicht verändern, können wir zusätzlich $x(t_1) + x(t_2) = 0$ annehmen. Setzen wir $r := x(t_2)$, so folgt

$$-r = x(t_1) \le x(t) \le x(t_2) = r \quad \text{für } t \in [0, L] \ .$$

Wir erklären folgende Abbildung $(\tilde{x}(t), \tilde{y}(t))$ durch

$$\tilde{x}(t) := x(t) \quad , \quad \tilde{y}(t) := \begin{cases} +\sqrt{r^2 - x(t)^2} & \text{für } t \in [t_1, t_2] \\ -\sqrt{r^2 - x(t)^2} & \text{sonst} \end{cases}$$

Die Abbildung $\tilde{c}(t) = (\tilde{x}(t), \tilde{y}(t))$ stellt eine Projektion der Kurve $c(t)$ auf den Kreis $S_r = \partial B_r$ dar.

2.) Wir behaupten

$$\pi r^2 = \int_0^L \tilde{y}(t)\tilde{x}'(t)dt \ .$$

Zum Beweis dieser Behauptung berechnen wir

$$\begin{aligned}
\int_0^L \tilde{y}(t)\tilde{x}'(t)dt &= \int_0^{t_1} \tilde{y}\tilde{x}'\,dt + \int_{t_1}^{t_2} \tilde{y}\tilde{x}'\,dt + \int_{t_2}^{L} \tilde{y}\tilde{x}'\,dt \\
&= -\int_0^{t_1} \sqrt{r^2-x^2}x'\,dt + \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{r^2-x^2}x'\,dt - \int_{t_2}^{L} \sqrt{r^2-x^2}x'\,dt \\
&= -\int_{x(0)}^{-r} \sqrt{r^2-s^2}\,ds + \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2-s^2}\,ds - \int_{r}^{x(0)} \sqrt{r^2-s^2}\,ds \\
&= 2\int_{-r}^{r} \sqrt{r^2-s^2}\,ds = 2\,\frac{\pi r^2}{2} = \pi r^2 \ .
\end{aligned}$$

3.) Wir können nun die eigentliche isoperimetrische Ungleichung beweisen

$$\begin{aligned}
2\sqrt{A\pi r^2} &\leq A + \pi r^2 \qquad \text{(Ungleichung zwischen arith. und geom. Mittel)} \\
&= \int_0^L xy'\,ds + \int_0^L \tilde{y}\tilde{x}'\,ds \qquad \text{(Einsetzen)} \\
&= \int_0^L (xy' + \tilde{y}\tilde{x}')dt = \int_0^L (\tilde{x}y' + \tilde{y}x')dt \\
&\leq \int_0^L \sqrt{(\tilde{x}^2+\tilde{y}^2)(x'^2+y'^2)}dt \qquad \text{(Cauchy-Schwarz-Ungleichung)} \\
&= \int_0^L \sqrt{r^2\cdot 1}dt = rL \ .
\end{aligned}$$

Durch Quadrieren dieser Ungleichung erhält man wie gewünscht $4A\pi \leq L^2$. □

Bemerkung. 1.) Wir wissen jetzt, dass der Kreis eine Lösung des isoperimetrischen Problemes ist. Es könnte aber eventuell noch weitere Lösungen geben. Tatsächlich ist der Kreis die einzige Lösung des isoperimetrischen Problemes. Dazu muss man sich nur überlegen, für welchen Fall die Ungleichungen im Beweis mit Gleichheit erfüllt sind.
2.) Auch in höheren Dimensionen, also im $\mathbb{R}^n$ mit $n \geq 3$, lassen sich isoperimetrische Ungleichungen beweisen (siehe z.B. [Be], Kapitel 12.11). Allerdings sind die Beweise dort deutlich komplizierter als der hier vorgestellte.

4.4. **Ausblick: Weitere globale Eigenschaften ebener Kurven.** Die Krümmung ist eine lokale Eigenschaft einer orientierten Kurve: Es reicht, die Kurve in der Umgebung eines Punktes zu kennen, um sie für diesen Punkt zu berechnen. Auch die Bogenlänge kann man auf Teilstücken berechnen, ohne dass der Rest der Kurve das Ergebnis beeinflusst.

Globale Aussagen sind dagegen Aussagen, die die Kenntnis der ganzen Kurve voraussetzen. Wir geben einige Aussagen für *geschlossene* reguläre ebene Kurven an, also Abbildungen $c\colon [a,b] \to \mathbb{R}^2$ mit $c(a) = c(b)$, $c'(a) = c'(b)$, $c''(a) = c''(b)$. Die Kurve c heißt *einfach* oder eingebettet, wenn $c|_{[a,b)}$ injektiv ist. Wir geben einige Beispiele solcher Aussagen an, auch wenn wir sie in dieser Vorlesung nicht näher behandeln können (man findet Beweise z.B. in Bär [B]).

Umlaufsatz von Hopf:
Eine einfach geschlossene ebene Kurve hat die Umlaufzahl $+1$ oder -1.

Vierscheitelsatz:
Eine einfach geschlossene ebene Kurve hat mindestens vier Punkte, in denen die Krümmung kritisch ist (dass sie zwei hat, ist klar – warum?).

Jordanscher Kurvensatz:
Jede einfach geschlossene ebene Kurve zerlegt $\mathbb{R}^2$ in zwei Zusammenhangskomponenten, davon eine kompakt (das *Innengebiet*) die andere nicht kompakt. Der Satz gilt sogar für C^0-Kurven.

5. Übungsaufgaben

5.1. **Bogenlänge, Umparametrisierung.**

Aufgabe 1 – Länge einer Kurve und Bogenlänge:

Gegeben ist die Kurve

$$c(t) : (-1,1) \to \mathbb{R}^2 \quad ; \quad c(t) := \left(t^2, t\sqrt{1-t^2}\right) .$$

a) Berechnen Sie die Länge der Kurve c.

b) Geben Sie eine Parametrisierung der Kurve c nach Bogenlänge an.

c) Zeigen Sie $\lim_{t\to+1} c(t) = \lim_{t\to-1} c(t)$, d.h. die Kurve ist geschlossen. Berechnen Sie die Grenzwerte $\lim_{t\to\pm1} c'(t)$ und deuten Sie das Ergebnis.

Aufgabe 2 – Logarithmische Spirale:

Für $h > 0$ sei $c\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ definiert durch $c(t) := (e^{ht}\cos t, e^{ht}\sin t)$. Berechnen Sie die Länge der Kurve $c|_{[a,b]}$, sowie den Grenzwert $\lim_{a\to-\infty} L(c|_{[a,0]})$.

Aufgabe 3 – Umparametrisierung:

Welche Parametrisierungen repräsentieren dieselbe orientierte Kurve?

$$\begin{aligned}
c_1(t) &:= (\cos t, \sin t) \quad , \; t \in (0,\pi) \\
c_2(t) &:= (\cos^2 t - \sin^2 t, 2\sin t\cos t) \quad , \; t \in (0,\tfrac{\pi}{2}) \\
c_3(t) &:= (t, \sqrt{1-t^2}) \quad , \; t \in (-1,1) \\
c_4(t) &:= \left(\tanh t, \frac{1}{\cosh t}\right) \quad , \; t \in (-\infty,+\infty)
\end{aligned}$$

Aufgabe 4 – Geraden sind am kürzesten:

Schließen Sie aus dem Folgenden, dass die Gerade $g(t) := (t,0)$ für $t \in [0,1]$ die kürzeste Verbindung der Punkte $(0,0)$ und $(1,0)$ ist.

a) Zeigen Sie, dass die Länge der Gerade g gleich 1 ist.

b) Sei $c\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2$ mit $c(0) = (0,0)$ sowie $c(1) = (1,0)$ eine Kurve mit $c(t_0) \notin [0,1] \times \{0\}$ für ein $t_0 \in [0,1]$. Zeigen Sie für ihre Länge $L(c) > 1$.

Aufgabe 5 – Die Kettenlinie:

Unter Einfluss der Schwerkraft hängt ein an zwei Punkten befestigtes Seil in Form einer Kurve, die wir bestimmen wollen.

Wir nehmen an, die beiden Punkte liegen nicht übereinander und die Kurve läßt sich schreiben als Graph $\{(x, f(x)), x \in [0,b]\}$. Zu $0 \le t \le b$ betrachten wir das Teilstück $(x, f(x))$ der Kurve mit

$0 \leq x \leq t$. Die Tangentialvektoren in dessen Endpunkten, $T_0 := \big(1, f'(0)\big)$ und $-T_t := -\big(1, f'(t)\big)$, entsprechen den tangential nach innen wirkenden Kräften. Beachten Sie, dass wir die Längen von $T_0, -T_t$ bereits so gewählt haben, dass sich die Horizontalkomponenten $1, -1$ der Kräfte ausgleichen.

a) Formulieren Sie eine Kräftebilanz für die Vertikalkomponenten der Kräfte: Die vom Seil ausgeübte Gewichtskraft entspricht dem ρ-fachen der Länge des Teilstücks, für $\rho > 0$. Sie ist gleich der Summe der beiden Vertikalkomponenten von T_a und T_t.
b) Leiten Sie aus a) eine Differentialgleichung zweiter Ordnung her.
c) Lösen Sie die Differentialgleichung durch Trennung der Variablen. Hatte Galilei 1638 recht, der die Lösungskurve als eine Parabel bestimmte?

5.2. **Krümmung ebener Kurven.**

Aufgabe 6 – Ellipse:

Berechnen Sie die Krümmung κ einer Ellipse $c(t) = \big(a\cos t, b\sin t\big)$, wobei $a, b > 0$ und $t \in [0, 2\pi]$. In welchen Punkten wird die Krümmung maximal bzw. minimal? Diese Punkte nennt man *Scheitelpunkte.*

Aufgabe 7 – Traktrix:

Die *Schleppkurve* oder *Traktrix* ist die Kurve

$$c(t) := \Big(\frac{1}{\cosh t}, t - \tanh t\Big) \quad ; \; t \in \mathbb{R}.$$

a) Zeigen Sie, dass $c(t)$ regulär für alle $t \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ ist.
b) Der Abstand zwischen $c(t)$ und dem Schnittpunkt der y-Achse und der Tangentengerade $\{c(t) + sc'(t) \mid s \in \mathbb{R}\}$ ist konstant für $t \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.
c) Skizzieren Sie die Kurve c und berechnen Sie ihre Krümmung $\kappa(t)$.

Aufgabe 8 – Graphen als Kurven:

Zu einer glatten Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ erklären wir die Kurve

$$c(t) \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \qquad c(t) := \big(t, f(t)\big) \; .$$

a) Für welche $t \in \mathbb{R}$ ist $c(t)$ regulär?
b) Ermitteln Sie die Normale $n(t)$.
c) Geben Sie eine Parametrisierung von c nach Bogenlänge an.
d) Berechnen Sie die Krümmung $\kappa(t)$.

Aufgabe 9 – Krümmung unter linearen Abbildungen:

Gegeben sei eine Kurve $c(t)\colon (a,b) \to \mathbb{R}^2$ mit Krümmung $\kappa(t)$ sowie eine 2×2-Matrix A. Berechnen Sie die Krümmung $\tilde{\kappa}(t)$ der Kurve $\tilde{c}(t) := Ac(t)$ in Abhängigkeit von $\kappa(t)$. Was passiert im speziellen Fall einer orthogonalen Matrix A (d.h. $A^tA = E$)?

Aufgabe 10 – Durch ihre Krümmung gegebene Kurven, Klothoide:

Bestimmen Sie die nach Bogenlänge parametrisierte Kurven $c(t)$, deren Krümmungsfunktion $\kappa(t)$ wie folgt vorgegeben ist:

$$\text{a)} \quad \kappa(t) = \frac{1}{t} \quad , \; t \in [1,\infty) \qquad \text{b)} \quad \kappa(t) = at \quad , \; t \in [0,\infty)$$

Nehmen Sie dazu die beiden Bedingungen $c(0) = (0,0)$ sowie $c'(0) = (1,0)$ an. Das Ergebnis von b), die *Klothoide*, ist für $a \neq 0$ nicht elementar integrierbar. Skizzieren Sie die Kurven.

Aufgabe 11 – Evoluten :

Es sei $c(t)\colon [a,b] \to \mathbb{R}^2$ eine reguläre C^2-Kurve, die der Einfachheit halber nach Bogenlängen parametrisiert sei. Ferner sei $n(t)$ die Normale und die Krümmung erfülle $\kappa(t) \neq 0$ für alle $t \in [a,b]$. Die Kurve der Krümmungsmittelpunkte

$$\gamma(t) := c(t) + \frac{1}{\kappa(t)} n(t)$$

nennt man *Evolute*.

a) Zeigen Sie, dass die Normalengerade $\{c(t) + sn(t) \mid s \in \mathbb{R}\}$ an $c(t)$ übereinstimmt mit der Tangentengerade an γ im Punkt $\gamma(t)$.

b) Es sei $\kappa'(t) < 0$ für $t \in [a,b]$. Zeigen Sie

$$L(\gamma) = \frac{1}{\kappa(b)} - \frac{1}{\kappa(a)}$$

für die Länge der Kurve γ.

c) Für welche $t \in [a,b]$ ist $\gamma(t)$ regulär?

d) Die Kurve

$$c(t) := (t + \sin t, -\cos t) \quad , \; t \in \mathbb{R}$$

nennt man *Zykloide*. Skizzieren Sie c und berechnen Sie ihre Evolute. Zeigen Sie, dass die Evolute der Zykloide wieder die Zykloide selbst ist (bis auf eine Translation).

Aufgabe 12 – Krümmungskreise:

Gegeben sei eine auf Bogenlänge parametrisierte Kurve $c(t) = (x(t), y(t)) : [a,b] \to \mathbb{R}^2$. In einem Punkt $t_0 \in (a,b)$ sollen die Bedingungen

$$c(t_0) = (r,0) \quad , \quad c'(t_0) = (0,1) \quad \text{sowie} \quad \kappa(t_0) > \frac{1}{r}$$

für ein $r > 0$ gelten. Weiterhin sei B_r die abgeschlossene Kreisscheibe $\{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leq r^2\}$.

a) Skizzieren Sie die Kreisscheibe B_r sowie eine mögliche Lage der Kurve c.
b) Zeigen Sie, dass sich die Kurve c lokal um $c(t_0)$ innerhalb der Kreisscheibe B_r befindet.
Hinweis: Zeigen Sie, dass die Hilfsfunktion $f(t) := x(t)^2 + y(t)^2$ in t_0 ein striktes lokales Maximum annimmt.

Aufgabe 13 – Existenz von Wendepunkten:

Gegeben sei eine Kurve $c(t) = (t, f(t))$ mit $f : [t_1, t_3] \to \mathbb{R}$ sowie ein $t_2 \in (t_1, t_3)$, sodass die drei Punkte $(t_k, f(t_k))$ für $k = 1, 2, 3$ auf einer Geraden liegen. Zeigen Sie, dass dann ein $t_* \in (t_1, t_3)$ existiert mit $f''(t_*) = 0$, also ein Wendepunkt von f.

Aufgabe 14 – Parallelkurven:

a) Sei c nach Bogenlänge parametrisiert. Zeigen Sie, dass die Parallelkurve c_d die folgende Krümmung besitzt:
$$\kappa_d(t) = \frac{\kappa(t)}{1 - d\kappa(t)}$$
Interpretieren Sie das Ergebnis mit Krümmungskreisen!
b) Geben Sie eine reguläre Kurve c an, so dass für kein $d \neq 0$ die Parallelkurve c_d regulär ist.

Aufgabe 15 – Konvexität einfach geschlossener Kurven mit positiver Krümmung:

Gegeben sei eine geschlossene Kurve $c(t) = \big(x(t), y(t)\big) \colon [a, b] \to \mathbb{R}^2$, die nach Bogenlänge parametrisiert sei. Ihr Tangentenwinkel $\vartheta(t)$ mit $c'(t) = (\cos\vartheta(t), \sin\vartheta(t))$ erfülle $\vartheta(b) - \vartheta(a) \leq 2\pi$ und ihre Krümmung $\kappa(t) \geq 0$. Weiterhin gelte
$$c(a) = c(b) = (0, 0) \quad \text{sowie} \quad c'(a) = c'(b) = (1, 0)\ .$$
Zeigen Sie, dass $y(t) \geq 0$ für alle $t \in [a, b]$ gilt, d.h. die Kurve c liegt oberhalb der x-Achse.
Hinweis: Zeigen Sie, dass $y(t)$ in a ein globales Minimum annehmen muss.
Zusatzaufgabe: Zeigen Sie, dass die Kurve auf dem Intervall $[a, b)$ injektiv ist.

5.3. **Raumkurven und Frenettheorie.**

Aufgabe 16 – Helix:

Es sei $c\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ die Helix $c(t) := \big(r\cos t, r\sin t, ht\big)$, wobei $r > 0$ und $h \in \mathbb{R}$.

a) Berechnen Sie Krümmung $\kappa(t)$ und Normale $n(t)$ der Helix.
b) Ergänzen Sie $e_1(t) = \frac{c'(t)}{|c'(t)|}$ und $e_2(t) = n(t)$ durch $e_3(t) = b(t)$ zu einer positiv orientierten Orthonormalbasis und berechnen Sie die Torsion $\tau(t)$.

Aufgabe 17 – Geschlossene Raumkurve konstanter Krümmung, die kein Kreis ist:

Wir betrachten eine Helix $c(t) := \big(r\cos t, r\sin t, ht\big)$ mit $0 < |h| \leq r$.

a) Zeigen Sie: Es existieren $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$, so dass $c'(t_1)$ und $c'(t_2)$ senkrecht aufeinander stehen.
b) Für t_1, t_2 wie in (a) betrachten wir die Normalenebenen $E_1 := \{c(t_1) + v \mid v \perp c'(t_1)\}$ und $E_2 := \{c(t_2) + v \mid v \perp c'(t_2)\}$. Spiegeln Sie das Kurvenstück $c|_{[t_1,t_2]}$ an den Normalenebenen, um eine geschlossene C^2-Kurve in $\mathbb{R}^3$ zu konstruieren, die konstante Krümmung hat, aber kein Kreis ist.

Aufgabe 18 – Frenet-Gleichungen:

Beweisen Sie die Frenetschen Differentialgleichungen (7).

Aufgabe 19 – Ebene Kurven und verschwindende Torsion:

Es sei $c\colon [a,b] \to \mathbb{R}^3$ eine Frenet-Kurve.

a) Ist c *eben*, d.h. in einer Ebene des $\mathbb{R}^3$ enthalten, so gilt $\tau \equiv 0$.
b) Zeigen Sie $b' = -\tau n$, indem Sie die Skalarprodukte von b' mit c', n, b berechnen.
c) Zeigen Sie nun die Umkehrung von (a). (Was ist $\langle b, c\rangle'$?)

5.4. **Globale Kurventheorie.**

Aufgabe 20 – Umlauf- und Windungszahl:

Gegeben sind die beiden geschlossenen Kurven

$$c_1(t) := (2\sin t, \sin 2t), \quad t \in [0, 2\pi] \quad \text{sowie} \quad c_2(t) := (2\cos t, \sin t), \quad t \in [0, 2\pi]\,.$$

a) Skizzieren Sie die Kurven und stellen Sie die Umlaufszahlen fest.
b) Ermitteln Sie aus der Skizze die Windungszahlen um die Punkte $(1,0)$, $(-1,0)$ sowie $(0,2)$.

Aufgabe 21 – Große Umlauf- und Windungszahlen:

a) Zeichnen Sie eine ebene Kurve mit großer Umlauf-, aber kleinen Windungszahlen.
b) Zeichnen Sie eine ebene Kurve mit großen Windungszahlen, deren Umlaufzahl gleich null ist.

Aufgabe 22 – Windungszahl von Kurven:

Sei $c : I \to \mathbb{R}^2$ eine beliebige, geschlossene Kurve.

a) Zeigen Sie, dass es stets einen Punkt $p \in \mathbb{R}^2$ gibt, dessen Windungszahl $W(c,p)$ gleich Null ist.
b) Gibt es auch stets einen Punkt $q \in \mathbb{R}^2$, dessen Windungszahl $W(c,q)$ ungleich Null ist?

Aufgabe 23 – Brouwerscher Fixpunktsatz:

a) Zeigen Sie, dass jede stetige Abbildung $f : M \to M \in C^0(M, M)$ einen Fixpunkt hat, wenn M zur Kreisscheibe $B = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$ homöomorph ist. Dabei heißt M zu B homöomorph, wenn eine stetige, bijektive Abbildung $h : B \to M$ existiert, deren Inverse h^{-1} ebenfalls stetig ist.

b) Finden Sie eine kompakte, nichtleere und zusammenhängende Menge $M \subset \mathbb{C}$ sowie eine stetige Abbildung $f : M \to M$, welche keinen Fixpunkt besitzt.

Aufgabe 24 – Windungszahl auf Zusammenhangskomponenten:

Es sei $c : I \to \mathbb{R}^2$ eine geschlossene Kurve und $U \subset \mathbb{R}^2 \backslash c(I)$ eine wegzusammenhängende Menge, d.h. je zwei Punkte in U lassen sich durch Kurve verbinden, welche ganz in U liegt. Zeigen Sie, dass die Windungszahl konstant in U ist, also $W(c, p_1) = W(c, p_2)$ für $p_1, p_2 \in U$.

Aufgabe 25 – Isoperimetrisches Problem bei nichtgeschlossenen Kurven:

Es sei C die Menge aller regulären Kurven $c(t) = (x(t), y(t)) : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$ mit $c(0) = (-1, 0)$, $c(1) = (1, 0)$ mit $y(t) \geq 0$ in $[0, 1]$.

a) Skizzieren Sie zwei Kurven aus der Klasse C.

b) Sei L die Länge einer Kurve $c \in C$ sowie A der Flächeninhalt der Fläche, welche von c und der y-Achse eingeschlossen wird. Zeigen Sie $L^2 \geq 2\pi A$.

c) Für welche Kurve $c \in C$ gilt die Gleichheit $L^2 = 2\pi A$?

Aufgabe 26 – Isoperimetrisches Problem:

a) Im Jahre 1836 bewies Jakob Steiner, dass das isoperimetrische Problem außer dem Kreis keine andere Lösung besitzen kann. Hat er damit wirklich (wie er wahrscheinlich meinte) bewiesen, dass der Kreis die Lösung des isoperimetrischen Problemes ist?

b) Wir beweisen “1 ist die größte natürliche Zahl” wie folgt: Angenommen $n > 1$ wäre die größte natürliche Zahl. Dann ist n^2 größer als n, also kann n nicht die größte natürliche Zahl gewesen sein. Also muss 1 die größte natürliche Zahl sein.
Was halten Sie von dieser Argumentation? Was hat dies mit Teil a) zu tun?

Teil 2. Die äußere Geometrie von Hyperflächen

`6. Vorlesung, Mittwoch 23.5.07`

Wir wenden uns der Geometrie von Flächen zu. Wie bei Kurven studieren wir die sogenannte *lokale Geometrie*; es geht dabei um den Krümmungsbegriff. Wir benötigen dafür die Analysis mehrerer Veränderlicher; lineare Algebra wird ebenfalls eine entscheidende Rolle spielen.

Genauer wollen wir mit Hilfe der Normalenabbildung untersuchen, wie eine Fläche im umgebenden Raum liegt. In diesem Sinne betrachten wir die *äußere Geometrie* von Flächen. Die Ableitung der Normalenabbildung liefert dann die verschiedenen Krümmungsbegriffe für Flächen: Hauptkrümmungen, Gauß- und mittlere Krümmung.

1. Parametrisierte Flächen

1.1. **Bezeichnungen und Notation.** Wir verwenden den Buchstaben U für Gebiete des $\mathbb{R}^n$, d.h. für offene (weg-)zusammenhängende Teilmengen.

Ist $f\colon U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ differenzierbar, so bezeichnen wir mit df_p das Differential. Es ist immer am einfachsten, sich darunter die Jacobimatrix von f vorzustellen. Diese Matrix hängt vom sogenannten *Fußpunkt* p ab, den wir der Übersichtlichkeit halber in vielen Fällen einfach weglassen.

Eine *Richtungsableitung* in Richtung eines Vektors $X \in \mathbb{R}^n$ erklären wir als

$$\partial_X f(p) := \frac{d}{dt} f(p+tX)\Big|_{t=0}.$$

Mit Hilfe der Kettenregel stellt man fest

$$d_X f(p) = df_p(X)$$

wobei $df(X)$ die Anwendung des Vektors X auf die lineare Abbildung df bezeichnet. Wir schreiben auch $df\,X$ statt $df(X)$, wobei dies die Matrixmultiplikation der Matrix df mit dem Vektor X bedeutet. Die Standardbasis von $\mathbb{R}^n$ schreiben wir als $e_1, \ldots, e_n$ wobei $e_1 = (1, 0, \ldots, 0)$ und so weiter. Die partiellen Ableitung sind natürlich eine spezielle Richtungsableitung (in Richtung des i-ten Basisvektors e_i):

$$\partial_i f(p) := \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) = df_p(e_i) = \partial_{e_i} f(p)$$

Eine Abbildung $f \in C^1(U, \mathbb{R}^m)$ heißt *Immersion*, wenn für jedes $p \in U$ das Differential $df_p\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ den Rang n hat. (Warum gilt dann $n \le m$?)

1.2. **Flächenstücke.** Wie bei Kurven wollen wir Selbstschnitte zulassen, und parametrisierungsunabhängige Eigenschaften von $f(U)$ studieren. Wir definieren daher ganz analog:

Definition. (i) Ein *parametrisiertes Flächenstück* ist eine glatte Immersion $f\colon U \to \mathbb{R}^m$.
(ii) Zwei parametrisierte Flächenstücke $f\colon U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $\tilde f\colon \tilde U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ heißen äquivalent, wenn $\tilde f = f \circ \varphi$ für einen Diffeomorphismus $\varphi : \tilde U \to U$ ist (φ ist also invertierbar und φ wie φ^{-1} sind glatt). Ein *Flächenstück* ist eine Äquivalenzklasse parametrisierter Flächenstücke.

Die Glattheit ist kaum je nötig, meist reicht zweimal stetig differenzierbar. Wir wollen hier aber ausdrücklich erwähnen, dass unsere Flächen Selbstschnitten haben können, also die Abbildungen nicht injektiv sein müssen.

Jedem $p \in U$ und $X \in \mathbb{R}^n$ können wir auf der Fläche den *Tangentialvektor* $df_p(X)$ zuordnen. Die Menge der Tangentialvektoren bildet den *Tangentialraum* in p,

$$T_p f := \{df_p(X) \mid X \in \mathbb{R}^n\},$$

einen n-dimensionalen Untervektorraum des $\mathbb{R}^m$. Es dient der Unterscheidung von verschiedenen Tangentialräumen in Doppelpunkten, dass wir als Index einen Punkt p aus dem Parametergebiet U nehmen. Den Vektor X stellen wir uns als tangential an die Parametermenge U mit *Fußpunkt* p vor. Wir werden oft X, Y schreiben, ohne explizit zu sagen, dass dies Vektoren des $\mathbb{R}^n$ sind.

Die Immersionseigenschaft bedeutet:

Lemma 1. *Für jedes $p \in U$ ist $df_p \colon \mathbb{R}^n \to T_p f$ ein Vektorraumisomorphismus und die Vektoren $df_p(e_1) = \partial_1 f, \dots, df_p(e_n) = \partial_n f$ bilden eine Basis von $T_p f$.*

Einen Tangentialvektor $df_p(X)$ an eine Fläche kann man stets als den Tangentialvektor einer Kurve in der Fläche schreiben: Dazu wählt man $\gamma \colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to U$, $\gamma(t) := p + tX$, und $c := f \circ \gamma$. Dann gilt

$$c'(0) = df_{\gamma(0)}\big(\gamma'(0)\big) = df_p(X).$$

1.3. **Erste Fundamentalform.** Die längentreue Parametrisierung nach der Bogenlänge ist für Kurven nützlich. Wie aus der Kartographie bekannt, hat aber nicht jede Fläche eine längentreue Parametrisierung; Gauß hat mit dem *theorema egregium* eine äquivalente Bedingung gefunden, die durch Krümmungen formuliert ist. Es bleibt daher nichts übrig, als mit verzerrenden Parametrisierungen zu arbeiten. Wir sehen das Maß der Verzerrung als eine Eigenschaft des Parameterbereiches an:

Definition. Sei $f \colon U \to \mathbb{R}^m$ parametrisiertes Flächenstück, und $p \in U$. Die *erste Fundamentalform* ist die Bilinearform

$$g \colon U \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \qquad g_p(X,Y) := \big\langle df_p(X), df_p(Y) \big\rangle$$

Wir bezeichnen $\|X\|_p := |df_p(X)| = \sqrt{g_p(X,X)}$ als *(Riemannsche) Länge* von X.

Die erste Fundamentalform ist bilinear und symmetrisch in (X,Y). Sie ist positiv definit, $g_p(X,X) = \big|df_p(X)\big|^2 > 0$ für $X \neq 0$, da f Immersion ist. Die erste Fundamentalform ist daher ein Skalarprodukt, das auf glatte Weise vom Fußpunkt p abhängt.

Oft stellt man die erste Fundamentalform auch in Form einer Matrix dar. Dazu erklären wir eine $n \times n$-Matrix durch

$$g = g(p) := (df_p)^T df_p \quad \text{mit} \quad g_{ij}(p) := g_p(e_i, e_j) = \langle \partial_i f, \partial_j f \rangle, \qquad 1 \leq i, j \leq n;$$

und nennen dieses die *Matrixdarstellung der ersten Fundamentalform.* Diese Matrix ist wegen $g_{ij} = g_{ji}$ symmetrisch. Zwischen der Bilinearform und ihrer Matrixdarstellung gilt nun folgender Zusammenhang

$$g_p(X,Y) = \langle df_p X, df_p Y\rangle = (df_p X)^T df_p Y = X^T(df_p^T df_p)Y = X^T g(p)\, Y = \langle X, g(p)Y\rangle\ .$$

Beispiel. Die Länge einer Kurve $c := f\circ\gamma$ auf einem Flächenstück berechnet sich durch

$$L(c) = \int_a^b |c'(t)|\, dt = \int_a^b |df_{\gamma(t)}\gamma'(t)|\, dt = \int_a^b \sqrt{g_{\gamma(t)}(\gamma',\gamma')}\, dt.$$

Man darf also im Parameterbereich integrieren, sofern man die Längenverzerrung der Fläche durch $\|.\|$ berücksichtigt.

Bemerkung. Für die Längenmessung von Kurven auf Flächen reicht es vollkommen aus, die erste Fundamentalform g der Fläche zu kennen. Deshalb wird die erste Fundamentalform als eine *Größe der inneren Geometrie* bezeichnet.

Definition. Wir nennen eine Parametrisierung $f : U \to \mathbb{R}^m$ *längentreu*, wenn sie die Längen von Kurven erhält, also wenn $L(f\circ\gamma) = L(\gamma)$ für eine beliebige Kurve $\gamma : [a,b] \to U$.

Mit Hilfe der ersten Fundamentalform können wir nun gerade alle längentreuen Parametrisierungen wie folgt charakterisieren.

Satz 2. *(Kriterium für Längentreue)*
Eine Parametrisierung $f : U \to \mathbb{R}^m$ ist genau dann längentreu, wenn $g_{ij}(p) = \delta_{ij}$ in jedem Punkt $p \in U$ gilt, also wenn $g(p)$ gleich der Einheitsmatrix ist.

Beweis. $\Leftarrow$: Aus $g(p) = E$ in jedem Punkt $p \in U$ folgt zunächst $g_p(X,Y) = \langle X,Y\rangle$ und daraus

$$L(f\circ\gamma) = \int_a^b \sqrt{g_{\gamma(t)}(\gamma',\gamma')}dt = \int_a^b \sqrt{\langle\gamma',\gamma'\rangle}dt = \int_a^b |\gamma'|dt = L(\gamma)\ .$$

$\Rightarrow$: Zu $p \in U$, $\varepsilon > 0$ und $X \in \mathbb{R}^n$ betrachte das Geradenstück $\gamma : [0,1] \to U$, $\gamma(t) := p + t\varepsilon X$. Wir berechnen

$$L(\gamma) = \int_0^1 |\gamma'(t)|dt = \int_0^1 \varepsilon|X|dt = \varepsilon|X|$$

und weiter

$$L(f\circ\gamma) = \int_0^1 \sqrt{\langle\gamma', g(\gamma)\gamma'\rangle}dt = \varepsilon\int_0^1 \sqrt{\langle X, g(p+t\varepsilon X)X\rangle}dt$$

Die Längentreue $L(\gamma) = L(f\circ\gamma)$ liefert im Grenzüpergang $\varepsilon \to 0$ die Gleichung $|X|^2 = \langle X, g(p)X\rangle$ für alle $X \in \mathbb{R}^n$. Daraus folgern wir $g_{ij}(p) = \delta_{ij}$ wie folgt: Für $X = e_i$ ist zunächst $1 = |e_i|^2 = \langle e_i, ge_i\rangle = g_{ii}$, also $g_{ii} = 1$. Für $i \neq j$ und $X = e_i + e_j$ folgt weiter

$$2 = |e_i + e_j|^2 = \langle e_i + e_j, ge_i + ge_j\rangle = g_{ii} + g_{ij} + g_{ji} + g_{jj} = 2 + 2g_{ij}\ ,$$

woraus dann $g_{ij} = 0$ folgt. $\square$

Beispiele. 1. Das *Helikoid* oder die *Wendelfläche* ist die parametrisierte Fläche

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \qquad f(x,y) := (x\sin y, -x\cos y, y). \tag{1}$$

Für jedes feste x sind die Parmeterlinien $y \mapsto f(x,y)$ Helices vom Radius x mit Ganghöhe 2π. Für jedes feste y sind die Parameterlinien $x \mapsto f(x,y)$ Geraden. Wir berechnen

$$\partial_1 f = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{pmatrix} \sin y \\ -\cos y \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \partial_2 f = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{pmatrix} x\cos y \\ x\sin y \\ 1 \end{pmatrix},$$

so dass

$$g = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1+x^2 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Die Funktion g_{22} gibt die quadrierte Länge des Tangentialvektors der Helices an, die in $|x|$ wächst. Weil die Geraden nach Bogenlänge parametrisiert ist g_{11} konstant und $g_{12} = g_{21}$ zeigt, dass die Parameterlinien senkrecht aufeinander stehen.

2. Zu einer (Höhen-)Funktion $u\colon U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ betrachten wir den Graphen $f(x) := \big(x, u(x)\big)$ mit

$$g_{ij} = \langle \partial_i f, \partial_j f \rangle = \big\langle (e_i, \partial_i u), (e_j, \partial_j u) \big\rangle = \delta_{ij} + \partial_i u\, \partial_j u.$$

Insbesondere gilt

$$\nabla u(x_0) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad g_{ij}(x_0) = \delta_{ij}$$

d.h. in Punkten, in denen u ein lokales Maximum oder Minimum annimmt, ist g gleich der Einheitsmatrix.

Es seien nun f und $\tilde{f} = f \circ \varphi$ zwei Parametrisierungen einer Fläche. Wir fragen: In welcher Beziehung stehen die beiden ersten Fundamentalformen g und $\tilde{g}$ zueinander? Dazu berechnen wir das folgende *Transformationsverhalten:* (wichtig!)

$$\tilde{g} = (d\tilde{f})^T d\tilde{f} = \Big(d(f\circ\varphi)\Big)^T d(f\circ\varphi) = (df\, d\varphi)^T df\, d\varphi = d\varphi^T df^T df\, d\varphi = d\varphi^T \cdot g \cdot d\varphi\,. \tag{3}$$

Bemerkung. Das Standard-Skalarprodukt auf U spielt für uns keine Rolle. Wenn wir Begriffe wie "senkrecht" oder "Orthonormalbasis" für U bzw. für Vektoren des $\mathbb{R}^n$ verwenden, so meinen wir dies bezüglich g. Insbesondere betrachten wir $e_1, \dots, e_n$ nicht als Orthonormalbasis bezüglich des Standard-Skalarproduktes, sondern nur als die uns durch die konkrete Realisierung $U \subset \mathbb{R}^n$ des Parametergebiets gelieferte Basis. Benötigen wir eine g_p-Orthonormalbasis $v_1, \dots, v_n$ des $\mathbb{R}^n$, so können wir sie durch das Schmidtsche Orthonormalisierungsverfahren bestimmen.

`7. Vorlesung, Montag 6.6.07` ______________________________

2. Die Normalen-Abbildung von Hyperflächen und ihre Ableitungen

Wir spezialisieren von nun an auf den Fall von Kodimension 1, also $m = n+1$. Flächen $f\colon U^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ heißen auch *Hyperflächen.*

2.1. **Gauß-Abbildung.** Wir betrachten den *Normalraum*

$$N_pf := (T_pf)^\perp = \{Y \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \langle Y, df_p(X)\rangle = 0 \quad \text{für alle } X \in \mathbb{R}^n\} \; .$$

Für Hyperflächen ist N_pf eindimensional und wird durch Einheitsvektoren aufgespannt:

Definition. Ist $f\colon U \to \mathbb{R}^{n+1}$ parametrisiertes Hyperflächenstück, so heißt eine glatte Abbildung $n\colon U \to \mathbb{S}^n$ mit

$$|n(p)| = 1 \quad , \quad \big\langle n(p), df_p(X)\big\rangle = 0 \qquad \text{für alle } X \in \mathbb{R}^n \text{ und } p \in U$$

eine *Gauß-Abbildung* oder *Normale.*

In Dimension $n = 2$ kann man eine Normale stets mit Hilfe des Kreuzproduktes definieren durch

$$n(p) := \frac{\partial_1 f \wedge \partial_2 f}{|\partial_1 f \wedge \partial_2 f|}$$

dabei ist $v \wedge w = \big(v_2w_3 - v_3w_2,\, v_3w_1 - v_1w_3,\, v_1w_2 - v_2w_2\big)$ das Kreuzprodukt zweier Vektoren im $\mathbb{R}^3$.

Auch im Falle höherer Dimension $n \geq 3$ kann man eine Normale über das Vektorprodukt erklären

$$n(p) := \frac{\partial_1 f \wedge \cdots \wedge \partial_n f}{|\partial_1 f \wedge \cdots \wedge \partial_n f|} \; .$$

Dabei ist nun $\wedge$ das Vektorprodukt von n Vektoren im $\mathbb{R}^{n+1}$. Die Existenz sowie die Eigenschaften dieses Vektorproduktes werden in Übungsaufgabe 5 behandelt.

Beispiel. Ein Graph $f(x) = \big(x, u(x)\big)$ besitzt die obere Normale

$$n(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}}\big(- \nabla u, 1\big), \tag{4}$$

denn n hat Länge 1 und steht senkrecht auf $\partial_i f = (e_i, \partial_i u)$ für alle i.

Bemerkung. Man kann die Wahl der Normale festhalten, indem man vom parametrisierten Flächenstück (f, n) spricht.

2.2. **Die Weingarten-Abbildung.** Wir werden verschiedene Krümmungsbegriffe für Flächen (z.B. Hauptkrümmung, Gauss- und mittlere Krümmung) mit Hilfe der sogenannten Weingarten-Abbildung erklären. Um nun die Weingarten-Abbildung definieren zu können, benötigen wir zunächst

Lemma 3. *Sei (f, n) ein Flächenstück. Dann bildet für jedes $p \in U$ die lineare Abbildung dn_p den Raum $\mathbb{R}^n$ auf T_pf ab, also $dn_p(X) \in T_pf$ für $X \in \mathbb{R}^n$.*

Beweis. Wir differenzieren die Gleichung $|n|^2 = \langle n, n\rangle = 1$ nach der Variable x_i und erhalten

$$0 = \partial_i\langle n, n\rangle = 2\langle \partial_i n, n\rangle = \langle dn_p(e_i), n\rangle \; .$$

Da nun $\langle dn_p(e_i), n\rangle = 0$ für alle i und dn_p eine lineare Abbildung ist, folgt $\langle dn_p(X), n\rangle = 0$, also $dn_p(X) \in T_pf$ für alle $X \in \mathbb{R}^n$. □

Wegen Lemma 1 (df_p ist Vektorraumisomorphismus) zusammen dem eben bewiesenen Lemma 3 gibt es für jedes $X \in \mathbb{R}^n$ genau ein $Y \in \mathbb{R}^n$, das die Gleichung $dn_p(X) = df_p(Y)$ erfüllt. Wir werden nun die Zuordnung $X \mapsto Y$ genauer studieren, und wir geben ihr folgenden Namen:

Definition. Die *Weingartenabbildung* S (engl. *shape operator*) von (f, n) ist die Abbildung

$$S\colon U \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \quad \text{mit} \quad df_p(S_p X) = -dn_p(X),$$

die nach Lemma 1 and 3 eindeutig bestimmt ist.

Durch das gewählte Minus-Vorzeichen werden gewisse Formeln später einfacher.

Die Weingartenabbildung hat die folgenden Eigenschaften:
1. Es gilt $S_p X = -(df_p)^{-1} dn_p(X)$. Dabei ist dn der wesentliche Teil. Das Differential df sehen wir nur an als nötige Übersetzungsvorschrift vom Parametergebiet ins Bild.
2. $X \mapsto S_p X$ ist linear für jedes $p \in U$, d.h. S_p ist Endomorphismus von $\mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}^n$.
3. S ändert sein Vorzeichen mit n.

Beispiele. 1. Für eine Ebene $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $f(x,y) = (x,y,0)$ ist $n \equiv (0,0,1)$ Normale. Also gilt $dn = 0$ und die Weingartenabbildung bildet $\mathbb{R}^2$ auf 0 ab, $S \equiv 0$.

2. Für den Einheits*zylinder*

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \qquad f(x,y) := (\cos x, \sin x, y) \tag{5}$$

wählen wir die innere Normale, $n(x,y) = \big(-\cos x, -\sin x, 0\big)$. Also hat man $dn(e_1) = (\sin x, -\cos x, 0) = -df(e_1)$ und $dn(e_2) = 0$, d.h. die Normale kippt, $Se_1 = e_1$, oder bleibt unverändert, $Se_2 = 0$.

3. Auf dem *hyperbolischen Paraboloid*

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \qquad f(x,y) := (x, y, xy) \tag{6}$$

sind

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = (1,0,y), \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = (0,1,x), \qquad n(x,y) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2+y^2}}(-y,-x,1).$$

Der Punkt $(0,0)$ ist ein Sattelpunkt (warum?). Es gilt

$$df\left(S_{(0,0)} e_1\right) = -dn_{(0,0)}(e_1) = -\frac{\partial n}{\partial x}(0,0) = (0,1,0) = df_{(0,0)}(e_2),$$

d.h. entlang der e_1-Richtung führt die Normale eine Drehung aus, $S_{(0,0)} e_1 = e_2$. Ebenso gilt $S_{(0,0)} e_2 = e_1$.

Wir benötigen nun folgenden

Satz 4. *(Transformationsverhalten der Weingartenabbildung)*
Es sei (f,n) ein parametrisiertes Flächenstück mit der Weingarten-Abbildung S. Weiter sei $(\tilde f, \tilde n) = (f\circ, n \circ \varphi)$ ein dazu äquivalentes Flächenstück mit der Weingarten-Abbildung $\tilde S$. Dann gilt das Transformationsverhalten

$$\tilde S = (d\varphi)^{-1}\, S\, d\varphi\ ,$$

und S sowie $\tilde S$ sind zueinander ähnlich. Insbesondere besitzen S und $\tilde S$ dieselben Eigenwerte.

Beweis. Für einen beliebigen Vektor $X \in \mathbb{R}^n$ ist

$$d\tilde{n}(X) = d(n \circ \varphi)(X) = dn(d\varphi X) = -df(S\, d\varphi X)$$

und weiter

$$d\tilde{f}(\tilde{S}X) = d(f \circ \varphi)(\tilde{S}X) = df\, d\varphi(\tilde{S}X) = df(d\varphi\, \tilde{S}X)\ .$$

Da nun $d\tilde{n}(X) = -d\tilde{f}(\tilde{S}X)$ und df vollen Rang hat, folgt $Sd\varphi X = d\varphi\tilde{S}X$. Nach Multiplikation mit $(d\varphi)^{-1}$ von links ist $(d\varphi)^{-1}\, S\, d\varphi X = \tilde{S}X$, woraus die erste Behauptung des Satzes folgt. Also ergibt sich $\tilde{S}$ aus S durch Anwendung einer Ähnlichkeitstransformation. Insbesondere stimmen die charakteristische Polynome von S und $\tilde{S}$ überein und somit auch die Eigenwerte (siehe Vorlesung Lineare Algebra). □

Aufgrund dieses Satzes ist folgende Definition sinnvoll.

Definition. Sei (f, n) ein parametrisiertes Flächenstück. Dann bezeichnen wir einen reellen Eigenwert $\kappa = \kappa(p)$ der Weingarten-Abbildung $S = S_p$ im Punkt $p \in U$ als *Hauptkrümmung* und den dazugehörigen Eigenvektor $v(p) \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ als die *Hauptkrümmungsrichtung.*

Beispiele. 1. Auf dem Zylinder (5) mit $Se_1 = e_1$ bzw. $Se_2 = 0$ sind also e_1 und e_2 zwei Hauptkrümmungsrichtungen, und zwar zu den Hauptkrümmungen 1 bzw. 0.

2. Im Punkt $(0, 0)$ des hyperbolischen Paraboloids (6) gilt $S_{(0,0)}e_1 = e_2$ und $S_{(0,0)}e_2 = e_1$. Es folgt $S(e_1 \pm e_2) = \pm(e_1 \pm e_2)$, so dass die beiden Diagonalen $e_1 \pm e_2$ die Hauptkrümmungsrichtungen im Punkt $(0, 0)$ sind, und ± 1 ihre Hauptkrümmungen.

3. Die Fälle $\mathbb{R}^n$ bzw. $\mathbb{S}^n_r$ sind degeneriert: Hier ist jede Richtung Hauptkrümmungsrichtung mit Hauptkrümmung 0 bzw. $\frac{1}{r}$ (vgle. Aufgabe 12).

Bemerkung. Wir wissen nun, dass die Hauptkrümmungen einer Fläche unabhängig von ihrer gewählten Parametrisierung sind. Allerdings wissen wir noch nicht, ob die Weingarten-Abbildung überhaupt reelle Eigenwerte besitzt. Außerdem haben wir noch keine effektive Möglichkeit zur Verfügung, die Eigenwerte auszurechnen. Wir benötigen daher folgendes Hilfsmittel:

2.3. **Die zweite Fundamentalform.** Um die Weingartenabbildung näher zu untersuchen, ist es nützlich, eine Bilinearform zu definieren, mit der man leichter rechnen kann:

Definition. Die *zweite Fundamentalform* ist die fußpunktabhängige Bilinearform

$$b_p(X, Y) := -\big\langle dn_p(X), df_p(Y)\big\rangle, \qquad X, Y \in \mathbb{R}^n,\ \ p \in U. \tag{7}$$

Was man (wahrscheinlich) nicht sofort sieht, ist, dass auch die zweite Fundamentalform symmetrisch ist. Daher zeigen wir

Lemma 5. *(Symmetrie der zweiten Fundamentalform)*
Sei (f, n) ein glattes Flächnstück. Dann gilt $b_p(X, Y) = b_p(Y, X)$.

Beweis. Wegen der Bilinearität reicht es aus, die Symmetrie für $X = e_i$ und $Y = e_j$ und $i, j = 1, \ldots, n$ nachzuweisen. Differenzieren wir die Gleichung $\langle n, \partial_i f \rangle = 0$ nach der Variablen x_j sowie die Gleichung $\langle n, \partial_j f \rangle = 0$ nach x_i, so folgt

$$\langle \partial_j n, \partial_i f \rangle = -\langle n, \partial_j \partial_i f \rangle = -\langle n, \partial_i \partial_j f \rangle = \langle \partial_i n, \partial_j f \rangle \ ,$$

wobei wir hier die Vertauschbarkeit der zweiten Ableitungen (Satz von Schwarz) verwenden. Es folgt dann

$$b_p(e_i, e_j) = -\langle dn_p(e_i), df_p(e_j) \rangle = -\langle \partial_i n, \partial_j f \rangle = -\langle \partial_j n, \partial_i f \rangle = -\langle dn_p(e_j), df_p(e_i) \rangle = b_p(e_j, e_i) \ .$$

□

Aufgrund dieses Satzes ergibt sich folgender Zusammenhang zwischen erster, zweiter Fundamentalform und Weingarten-Abbildung.

$$g(SX, Y) = \langle df(SX), df(Y) \rangle = -\langle dn(X), df(Y) \rangle = b(X, Y) \ . \tag{8}$$

Zusammen mit der Symmetrie der zweiten Fundamentalform ist dann

$$g(SX, Y) = g(X, SY) \ .$$

Falls nun noch in einem $p_0 \in U$ sogar $g_{ij}(p_0) = \delta_{ij}$ gilt, so folgt

$$\langle SX, Y \rangle = \langle X, SY \rangle \ ,$$

d.h. die Weingarten-Abbildung ist selbstadjungiert. Falls man S als Matrix auffasst, so kann man auch $S^T = S$ sagen. Nun ist aus der linearen Algebra bekannt, dass selbstadjungierte Abbildungen reell diagonalsierbar sind. Wir haben also

Satz 6. *(Existenz von Hauptkrümmungen)*
Sei $f : U \to \mathbb{R}^{n+1}$, $U \subset \mathbb{R}^n$ ein parametrisiertes Flächenstück. Dann existiert in jedem Punkt $p_0 \in U$ ein System von linear unabhängigen Hauptkrümmungsrichtungen $v_1(p_0), \ldots, v_n(p_0) \in \mathbb{R}^n$ mit dazugehörigen reellen Hauptkrümmungen $\kappa_1(p_0), \ldots, \kappa_n(p_0) \in \mathbb{R}$.

Beweis. 1.) Wir nehmen zunächst an, das $g_{ij}(p_0) = \delta_{ij}$ gilt. Dann ist S, wie oben gezeigt, selbstadjungiert und somit diagonalisierbar.
2.) Betrachten wir nun den allgemeinen Fall. Dazu betrachten wir die Umparametrisierung $\tilde{f} = f \circ \varphi$ mit den Diffeomorphismus $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\varphi(x) := Cx - Cp_0 + p_0$. Dabei ist C eine invertierbaren Matrix, welche noch gewählt werden muss. Es gilt $\varphi(p_0) = p_0$ sowie $d\varphi = C$. Wegen (3) gilt für die Metrik $\tilde{g}$ von $\tilde{f}$ die Gleichung

$$\tilde{g}(p_0) = (d\varphi)^T g(p_0) d\varphi = C^T P C \quad , \ P := g(p_0) \ .$$

Um $\tilde{g}(p_0) = E$ zu erreichen, müssen wir eine invertierbare Matrix C finden mit der Eigenschaft $C^T P C = E$. Mittels Hauptachsentransformation finden wir zunächst eine Matrix $\tilde{C}$ mit $\tilde{C}^{-1} P \tilde{C} = D$, wobei $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ eine Diagonalmatrix ist mit den Eigenwerten auf der Diagonalen. Da P symmetrisch ist, können wir sogar $\tilde{C}^T = \tilde{C}^{-1}$ annehmen, also $\tilde{C}^T P \tilde{C} = D$. Setzen wir $C := \tilde{C} D^{-1/2}$, wobei $D^{-1/2} = \operatorname{diag}(\lambda_1^{-1/2}, \ldots, \lambda_n^{-1/2})$, so folgt wie gewünscht $C^T P C = E$. Wenden wir nun 1.) auf $\tilde{f}$ an, so erhalten wir die Hauptkrümmungen für die Parametrisierung $\tilde{f}$ und mit Satz 4 dann auch dieselben Hauptkrümmungen für f. $\square$

`8. Vorlesung, Mittwoch 13.6.07`

Dieser Satz liefert nun zunächst die Existenz der Hauptkrümmungen, allerdings noch keine brauchbare Methode um diese zu berechnen. Dazu erklären wir zunächst die Matrixdarstellung der zweiten Fundamentalform

$$b = b(p) := -(dn_p)^T df_p \quad \text{mit} \quad b_{ij}(p) := b_p(e_i, e_j) = -\langle \partial_i n, \partial_j f \rangle = \langle n, \partial_{ij} f \rangle \quad 1 \leq i, j \leq n;$$

und analog zur ersten Fundamentalform gilt dann

$$b_p(X, Y) = \langle X, bY \rangle = \langle bX, Y \rangle \ .$$

Weiter berechnen wir

$$\langle bX, Y \rangle = b_p(X, Y) = g_p(SX, Y) = \langle SX, gY \rangle = \langle gSX, Y \rangle \ .$$

Da diese Gleichung für alle $X, Y \in \mathbb{R}^n$ gilt, folgern wir $gS = b$, oder äquivalent

$$S = g^{-1} b \ . \tag{9}$$

Um also die Hauptkrümmungen einer Fläche im Punkt $p \in U$ zu berechnen, muss man die Eigenwerte der Matrix $g^{-1}b$ in diesem Punkt ermitteln.

Beispiel. Wir betrachten den *Kegel*

$$f(x, y) := (y \cos x, y \sin x, y) \quad \text{für } x \in \mathbb{R} \ , \ y \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$$

welcher im Koordinatenursprung eine Spitze besitzt. Wir berechnen

$$\partial_1 f = (-y \sin x, y \cos x, 0) \quad , \quad \partial_2 f = (\cos x, \sin x, 1) \quad , \quad n(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\cos x, -\sin x, 1)$$

Weiter ist

$$\partial_{11} f = (-y \cos x, -y \sin x, 0) \quad , \quad \partial_{12} f = (-\sin x, \cos x, 0) \quad , \quad \partial_{22} f = (0, 0, 0) \ .$$

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} g &= \begin{pmatrix} |\partial_1 f|^2 & \langle \partial_1 f, \partial_2 f \rangle \\ \langle \partial_1 f, \partial_2 f \rangle & |\partial_2 f|^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y^2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad , \quad g^{-1} = \begin{pmatrix} y^{-2} & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} \\ b &= \begin{pmatrix} \langle n, \partial_{11} f \rangle & \langle n, \partial_{12} f \rangle \\ \langle n, \partial_{12} f \rangle & \langle n, \partial_{22} f \rangle \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Für die Weingarten-Abbildung erhalten wir

$$S = g^{-1} b = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} y^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \ .$$

Da S schon diagonal ist, können wir auf der Eigenwerte auf der Diagonalen ablesen: Es sind $\kappa_1 = \frac{1}{y\sqrt{2}}$ sowie $\kappa_2 = 0$. Es gilt $\kappa_1(y) \to \infty$ für $y \to 0$. Dies erklärt sich aus der Singularität des Kegels in seiner Spitze.

2.4. **Eigenschaften und Deutung der Hauptkrümmungen.**

Bei symmetrischen Matrizen wissen wir aus der linearen Algebra, dass ein linear unabhängiges System von orthonormierten Eigenvektoren existiert. Ähnliches gilt nun für die Hauptkrümmungsrichtungen.

Lemma 7. *Sei (f, n) ein Flächenstück und $p \in U$. Zwei Hauprkrümmungsrichtungen $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^n$ zu verschieden Hauptkrümmungen stehen bez. g senkrecht aufeinander, d.h. $g(v_1, v_2) = 0$. Weiter existiert ein bez. g orthonormiertes System von Hauptkrümmungsrichtungen $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^n$, d.h. es ist*

$$g_p(v_i, v_j) = \delta_{ij} \ .$$

Beweis. Seien v_i zwei Hauptkrümmungsrichtungen zu Hauptkrümmungen unterschiedlichen Hauptkrümmungen κ_i. Dann ist

$$\kappa_1 g(v_1, v_2) = g(Sv_1, v_2) = g(v_1, Sv_2) = \kappa_2 g(v_1, v_2) \ .$$

Aus $\kappa_1 \neq \kappa_2$ folgt dann $g(v_1, v_2) = 0$.
Die Konstruktion eines Systemes von orthonormierten Hauptkrümmungensrichtungen erfolgt nun mittels Gram-Schmidtschen Orthonormalisierungsverfahrens. □

Es sei ein Punkt $p \in U$ fixiert. Wir betrachten die kritischen Punkte der quadratischen Form $X \mapsto b(X, X) = g(SX, X) =: f(X)$ unter der Nebenbedingung, dass X Länge 1 bez. g besitzt, also unter der Nebenbedingung $h(X) := g(X, X) = 1$. Nach dem Satz von Lagrange (Extremwerte unter Nebenbedingungen) ist X kritisch genau dann, wenn $\nabla f(X) = \lambda \nabla h(X)$, wobei $\lambda \in \mathbb{R}$ der Lagrange-Parameter ist. Komponentenweise bedeutet dies $\partial_i f = \lambda \partial_i h$ für $i = 1, \ldots, n$. Wir berechnen dazu

$$\partial_i f = \frac{d}{dt} g\big(S(X + te_i), X + te_i\big)\Big|_{t=0} = g\big(SX, e_i\big) + g\big(Se_i, X\big) = 2g\big(SX, e_i\big),$$

und ebenso $\partial_i h = 2g(X, e_i)$. Weil diese beiden Gleichungen für alle $i = 1, \ldots, n$ gelten, folgt daraus die Eigenwertgleichung $SX = \lambda X$. Wir haben erhalten: *Die kritischen Punkte X der quadratischen Form $X \mapsto b(X, X)$ unter der Nebenbedingung $g(X, X) = 1$ sind also genau die Hauptkrümmungsrichtungen.* Daraus folgt nun

Satz 8. *Auf Flächen ($n = 2$) sind die Hauptkrümmungen gleich dem Maximum und Minimum der quadratischen Form $X \mapsto b(X, X)$ auf der kompakten Menge $\{X \in \mathbb{R}^2 \,|\, g(X, X) = 1\}$.*

2.5. **Gauß- und mittlere Krümmung.**

Definition. Es sei (f, n) ein auf U paramatrisiertes Flächenstück. Für $p \in U$ seien $\kappa_1(p), \ldots, \kappa_n(p)$ die Hauptkrümmungen bzgl. einer Basis $v_1(p), \ldots, v_n(p)$ von Hauptkrümmungsrichtungen. Die *Gauß-Krümmung K* ist das Produkt der Hauptkrümmungen, die *mittlere Krümmung H* ihr Mittelwert,

$$K(p) := \det S_p = \kappa_1(p) \cdot \ldots \cdot \kappa_n(p), \qquad H(p) := \frac{1}{n} \operatorname{Spur} S_p = \frac{1}{n}\big(\kappa_1(p) + \ldots + \kappa_n(p)\big).$$

Bemerkungen. 1.) Die Hauptkrümmungen κ_i sind von der gewählten Parametrisierung unabhängig; also auch H und K.
2.) Gemäß ihrer Definition sind zunächst mittlere und Gauss-Krümmung Größen der äußeren Geometrie. Man benötigt sowohl die erste als auch die zweite Fundamentalform, um sie zu berechnen.
3.) Erstaunlicherweise ist die Gauß-Krümmung K bei Flächen ($n = 2$) eine Größe der inneren Geometrie. Sie läßt sich bereits allein aus der ersten Fundamentalform g berechnen (Beweis im 3. Teil).
4.) Bei Wechsel der Normalen von n zu $-n$ ändert H stets sein Vorzeichen, aber K ändert das Vorzeichen nur in ungerader Dimension; in gerader Dimension ist K invariant.

Beispiele. (vgl. Abschnitt 2.2): 1. Der Zylinder (5) mit innerer Normalen hat konstante Hauptkrümmungen 0 und 1. Also gilt $K \equiv 0$ und $H \equiv \frac{1}{2}$.
2. Auf dem hyperbolischen Paraboloid (6) hat man $\kappa_{1,2}(0,0) = \pm 1$. Daher ist $K(0,0) = -1$, $H(0,0) = 0$.
3. Für $\mathbb{S}^n_r$ mit innerer Normaler gilt $K \equiv (\frac{1}{r})^n$, $H \equiv \frac{1}{r}$; für $\mathbb{R}^n$ ist $K \equiv 0$, $H \equiv 0$.

Aus (9) (d.h. $S = g^{-1}b$) gewinnt man folgende Darstellungen, mit denen man H, K gewöhnlich ausrechnet:

Satz 9. *Es seien g^{ij} die Einträge der Matrix g^{-1} und b_{ij} die Einträge von g. Dann haben Gauß- und mittlere Krümmung die Darstellung*

$$K = \det(g^{-1}b) = \det g^{-1} \det b = \frac{\det b}{\det g}, \qquad H = \frac{1}{n}\,\mathrm{Spur}(g^{-1}b) = \frac{1}{n}\sum_{1\le i,j\le n} g^{ij} b_{ij}.$$

Speziell für $n = 2$ ist $g^{-1} = \frac{1}{\det g}\begin{pmatrix} g_{22} & -g_{12} \\ -g_{21} & g_{11}\end{pmatrix}$ und daher

$$H = \frac{1}{2\det g}(g_{22}b_{11} - 2g_{12}b_{12} + g_{11}b_{22}).$$

Beispiel. Der Graph $f(p) = (p, u(p))$, $u : U \to \mathbb{R}$ besitze im Punkt $p_0 \in U$ eine horizontale Tangentialebene, oder äquivalent $\nabla u(p_0) = 0$. Es gilt also $g_{ij}(p_0) = \delta_{ij}$ und $b_{ij}(p_0) = \partial_{ij}u(p_0)$, siehe Abschnitt 2.2. Im Punkt p_0 erhalten wir daher

$$K(p) = \det\Big(D^2u(p_0)\Big), \qquad H(p) = \frac{1}{n}\mathrm{spur}\Big(D^2u(p_0)\Big) = \frac{1}{n}\triangle u(p_0)\ .$$

Dabei ist $D^2u = (\partial_{ij}u)_{i,j=1,\dots,n}$ die Hesse-Matrix von u und $\triangle$ bezeichnet den Laplace-Operator.

2.6. Beispiel: Rotationsflächen. `9. Vorlesung, Mittwoch 20.6.07`

Es sei $(r, h)\colon I \to \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ eine reguläre Kurve. Wir legen die Bildebene in die x, z-Ebene und rotieren sie um die z-Achse. Das Ergebnis ist die *Rotationsfläche*

$$f\colon I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, \qquad f(t,\varphi) := \begin{pmatrix} r(t)\cos\varphi \\ r(t)\sin\varphi \\ h(t)\end{pmatrix}.$$

Wegen

$$\partial_1 f = \begin{pmatrix} r' \cos\varphi \\ r' \sin\varphi \\ h' \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \partial_2 f = \begin{pmatrix} -r\sin\varphi \\ r\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix},$$

ist die erste Fundamentalform g diagonal mit

$$g_{11} = r'^2 + h'^2, \qquad g_{22} = r^2, \qquad g_{12} = g_{21} = 0.$$

Die Kurvensenkrechte $J\binom{r'}{h'} = \binom{-h'}{r'}$, normiert und um die z-Achse gedreht, ergibt die Flächennormale

$$n = \frac{1}{\sqrt{r'^2 + h'^2}} \begin{pmatrix} -h'\cos\varphi \\ -h'\sin\varphi \\ r' \end{pmatrix}.$$

Die zweiten Ableitungen sind

$$\partial_{11} f = \begin{pmatrix} r''\cos\varphi \\ r''\sin\varphi \\ h'' \end{pmatrix}, \quad \partial_{22} f = \begin{pmatrix} -r\cos\varphi \\ -r\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \partial_{12} f = \partial_{21} f = \begin{pmatrix} -r'\sin\varphi \\ r'\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix},$$

so dass

$$b_{11} = \langle \partial_{11} f, n\rangle = \frac{r'h'' - h'r''}{\sqrt{r'^2 + h'^2}}, \qquad b_{22} = \langle \partial_{22} f, n\rangle = \frac{rh'}{\sqrt{r'^2+h'^2}}, \qquad b_{12} = \langle \partial_{12} f, n\rangle = 0.$$

Weil sowohl g wie b diagonal sind, ist auch $g^{-1}b$ diagonal und die Koordinatenrichtungen $v_1 := e_t$, $v_2 := e_\varphi$ sind Hauptkrümmungsrichtungen, mit Hauptkrümmungen

$$\kappa_1 = g^{11} b_{11} = \frac{r'h'' - h'r''}{\sqrt{r'^2 + h'^2}^3}, \qquad \kappa_2 = g^{22} b_{22} = \frac{1}{r} \frac{h'}{\sqrt{r'^2 + h'^2}}. \tag{10}$$

Wir berechnen abschließend K, H der Rotationsfläche, wenn die Kurve (r, h) nach Bogenlänge parametrisiert ist. Aus $r'^2 + h'^2 = 1$ folgt $r'r'' + h'h'' = 0$ und daher

$$K = \frac{r'h'h'' - h'^2 r''}{r} = \frac{-r'^2 r'' - h'^2 r''}{r} = -\frac{r''}{r}, \qquad 2H = r'h'' - h'r'' + \frac{1}{r} h'.$$

Beispiel. Für $0 < \rho < R$ wird ein *Rotationstorus* erzeugt durch die nach Bogenlänge parametrisierte Kurve

$$\big(r, h\big)(t) = \Big(R + \rho\cos\frac{t}{\rho},\, \rho\sin\frac{t}{\rho}\Big).$$

Wegen $r' = -\sin\frac{t}{\rho}$ und $r'' = -\frac{1}{\rho}\cos\frac{t}{\rho}$ folgt

$$K = \frac{\frac{1}{\rho}\cos\frac{t}{\rho}}{R + \rho\cos\frac{t}{\rho}}.$$

Es gilt $K = 0$ genau für $\frac{t}{\rho} = \frac{\pi}{2} + k\pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$. Für alle anderen Punkte gilt: Auf der "Außenseite" des Torus ist $K > 0$, auf der "Innenseite" ist $K < 0$.

Wir wollen nun alle rotationssymmetrischen Flächen mit verschwindender Gauss-Krümmung $K \equiv 0$ ermitteln: Offensichtlich muss dann $r''(t) = 0$ sein, also $r(t) = at + b$ mit $a, b \in \mathbb{R}$.

Weiter ist $h'^2 = 1 - r'^2 = 1 - a^2$, also $h(t) = c \pm \sqrt{1-a^2}t$. In jedem Fall parametrisiert $(r,h)(t)$ eine Gerade und die sich ergebende Rotationsfläche ist eine Ebene, ein Zylinder oder ein Kegel.

3. Lokale Normalform und Deutung der Gauss-Krümmung

3.1. **Lokale Normalform: Darstellung als Graph.** Durch Rotation wollen wir eine Fläche lokal als Graph über der $x_1, \ldots, x_n$-Hyperebene schreiben. Dabei bleiben unter Drehungen im Raum auch die Hauptkrümmungen erhalten:

Lemma 10. *(Invarianz der Hauptkrümmungen unter Drehungen)*
Sei (f,n) ein Hyperflächenstück und $(\tilde{f}, \tilde{n}) = (Af, An)$ die Drehung von (f,n) im $\mathbb{R}^{n+1}$ um eine orthogonale $n+1 \times n+1$-Matrix A, also $A^T = A^{-1}$. Dann besitzen (f,n) und $(\tilde{f}, \tilde{n})$ dieselbe Weingartenabbildung und somit auch dieselben Hauptkrümmungen.

Beweis. Als Übungsaufgabe. Hinweis: Man zeige zunächst, dass die ersten und zweiten Fundamentalformen beider Flächen übereinstimmen. □

Flächen kann man lokal als Graph über ihrer Tangentialebene schreiben. Wir verallgemeinern zunächst die Darstellung I(12) von Kurven.

Lemma 11. *(lokale Graphendarstellung)*
Es sei (f,n) parametrisiertes Hyperflächenstück im $\mathbb{R}^{n+1}$ und der Koordinatenursprung 0 liege auf der Fläche (durch Translation stets erreichbar). Dann lässt sich die Fläche nach geeigneter Drehung lokal als Graph

$$(x, u(x)) : U \to \mathbb{R}^{n+1} \quad \textit{mit} \quad u : U \to \mathbb{R}$$

schreiben. Dabei ist u eine glatte Abbildung, U offen mit $0 \in U$ und $u(0) = 0 = \nabla u(0)$. Ferner sind die Hauptkrümmungen der Fläche im Punkt 0 gleich den Eigenwerten der Hesse-Matrix $D^2u(0)$.

Beweis. Nach Voraussetzung existiert ein p_0 mit $f(p_0) = 0$. Durch geeignete Drehung der Fläche im Raum erreichen wir, dass der Tangentialraum $T_{p_0}f$ gleich $\mathbb{R}^n \times \{0\}$ ist, oder äquivalent, dass in p_0 die Normale gleich $N = (0, \ldots, 0, 1)$ ist. Insbesondere ist

$$0 = \langle \partial_i f(p_0), N \rangle = \partial_i f_{n+1}(p_0) \quad \text{für } i = 1, \ldots, n\,.$$

Wir setzen $f(p) = (\varphi(p), f_{n+1}(p))$ mit $\varphi(p) = (f_1(p), \ldots, f_n(p)$. Da f eine Immersion ist, sind die Vektoren $\partial_1 f(p_0), \ldots, \partial_n f(p_0)$ lin. unabhängig und somit auch die Vektoren $\partial_1\varphi(p_0), \ldots, \partial_n\varphi(p_0)$. Nach dem Satz über die inverse Abbildung existiert dann lokal die Inverse $\varphi^{-1} : U \to \mathbb{R}^n$ auf einer offenen $U \subset \mathbb{R}^n$ mit $0 \in U$ sowie $\varphi^{-1}(0) = p_0$. Wir parametrisieren nun f mittels φ^{-1} um und erhalten die Graphendarstellung

$$\tilde{f}(x) = f \circ \varphi^{-1}(x) = \Big(\varphi \circ \varphi^{-1}(x), f_{n+1} \circ \varphi^{-1}(x)\Big) = (x, u(x))$$

mit $u(x) := f_{n+1} \circ \varphi^{-1}(x)$. Es folgt $u(0) = 0$. Da weiter die Normale des Graphen

$$n(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}}(-\nabla u, 1)$$

und $n(0) = N = (0, \dots, 0, 1)$ ist, folgt $\nabla u(0) = 0$.

Schließlich folgt $g_{ij}(0) = \delta_{ij}$ für die erste Fundamentalform des Graphen in 0. Weiter ist $b_{ij}(0) = \partial_{ij} u$ oder $b(0) = D^2u(0)$, es stimmen also zweite Fundamentalform b und Hesse-Matrix $D^2u(0)$ überein. Damit folgt nun $S = g^{-1}b = b = D^2u(0)$ für die Weingartenabbildung. Somit stimmen die Hauptkrümmungen mit den Eigenwerten der Hesse-Matrix $D^2u(0)$ überein. $\square$

Durch erneute geeignete Drehung im Raum kann man sogar folgendes erreichen.

Korollar 12. *(lokale Normalform)*
Es seien die Voraussetzungen von Lemma 11 erfüllt. Dann kann man für die Graphendarstellung u in diesem Lemma sogar erreichen, dass die Hesse-Matrix $D^2u(0)$ diagonal ist. Die Hauptkrümmungen sind dann bereits die Diagonalelemente der Hesse-Matrix.

Beweis. Es sei u der in Lemma 11 konstruierte Graph. Wir diagonalisieren nun die symmetrische Hesse-Matrix $D^2u(0)$: Es existiert eine orthogonale Matrix C mit $C^T = C^{-1}$, sodass $C^{-1}\, D^2u(0)C = D$ für eine Diagonalmatrix D ist. Nun betrachten wir den gedrehten Graphen

$$\tilde{u}(x) := u(Cx)\ .$$

Aus $0 = u(0) = \nabla u(0)$ ist dann ebenfalls $0 = \tilde{u}(0) = \nabla\tilde{u}(0)$. Ferner gilt folgende Transformationsformel für die Hesse-Matrix

$$D^2\tilde{u}(0) = C^T\, D^2u(0)\, C = C^{-1}\, D^2u(0)C = D$$

Also ist $D^2\tilde{u}(0)$ eine Diagonalmatrix und die Eigenwerte sind ihre Diagonalelemente. $\square$

Speziell für $n = 2$ erhalten wir

Satz 13. *Es sei $f\colon U \to \mathbb{R}^3$ eine Fläche, $p \in U$ und $K(p)$ die Gauss-Krümmung in p.*
(i) Gilt $K(p) < 0$, dann ist $f(p)$ Sattelpunkt ist, d.h. in jeder Umgebung von p findet man Punkte auf der Fläche, welche auf verschiedenen Seiten der affinen Ebene $f(p) + T_pf$ liegen.
(ii) Gilt $K(p) > 0$, dann ist f lokal konvex, d.h. es gibt eine Umgebung V von $f(p)$, sodass alle $q \in V$ die Bildpunkte $f(q)$ auf ein und derselben Seite von $f(p) + T_pf$ liegen.

Beweis. Durch geeignte Drehung und Translation schreiben wir f als Graph $(x, y, u(x, y))$. Wegen Lemma 12 können wir $D^2u(0, 0) = \mathrm{diag}(\kappa_1, \kappa_2)$ Wir verwenden nun $0 = u(0) = \nabla u(0)$, um u in eine Taylor-Reihe zu entwickeln

$$u(x, y) = \frac{1}{2}\kappa_1 x^2 + \frac{1}{2}\kappa_2 y^2 + O\Big(\sqrt{x^2 + y^2}^{\,3}\Big)\ .$$

Wir beachten nun $K = \kappa_1\kappa_2$. Im Falle (i) nehmen wir ohne Einschränkung $\kappa_1 > 0$, $\kappa_2 < 0$ an. Dann ist $u(x, 0)$ positiv für $|x|$ hinreichend klein und $u(0, y)$ negativ für hinreichend kleine $|y|$ und die Aussage folgt. Im Falle (ii) nehmen wir ohne Einschränkung an, dass $\kappa_1 > 0$ sowie $\kappa_2 > 0$ ist. Dann folgt für hinreichend kleines $x^2 + y^2$ die Ungleichung $u(x, y) \geq 0$.

$\square$

Man beachte, dass man im Fall $K(p) = 0$ keine Aussage treffen; tatsächlich kann dann jede der beiden Fälle eintreten.

Beispiel. Betrachte die beiden Graphen

$$u_1(x, y) = x^4 + y^4 \quad \text{und} \quad u_2(x, y) = x^4 - y^4 \,.$$

Beide haben in $(0, 0)$ die Gauss-Krümmung $K = 0$. Allerdings besitzt u_1 ein lokales Minimum und u_2 einen Sattel in $(0, 0)$.

Beispiel. Der Torus hat zwei berührende Ebenen senkrecht zur Rotationsachse, die den Torus jeweils in einem Kreis schneiden. Wir betrachten den Rotationstorus ohne diese beiden Kreise, Die eine Zusammenhangskomponente, auf der Innenseite, besteht nur aus Sattelpunkten; daher gilt dort $K \leq 0$. Auf der anderen, der Außenseite, ist der Torus lokal konvex, und daher gilt $K \geq 0$. Dass diese Ungleichungen strikt sind, kann man ohne Rechnen nicht sehen. Schließlich folgt in den Kreisen selbst $K = 0$ aus der Stetigkeit der Gauß-Krümmung.

`10. Vorlesung, Mittwoch 27.6.07` ———

3.2. **Die Gauß-Krümmung kompakter Hyperflächen.** Wir benötigen zunächst

Definition. Der Rand ∂A einer Menge $A \subset \mathbb{R}^{n+1}$ heißt glatt, wenn es zu jedem Randpunkt $p_0 \in \partial A$ eine offene Umgebung $V = V(p_0) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ sowie ein parametrisiertes Hyperflächenstück $f : U \to \mathbb{R}^{n+1}$ gibt mit $\partial A \cap V = f(U)$.

Bemerkung. Falls Sie sich mit Mannigfaltikeiten auskennen: Diese Definition besagt gerade, dass ∂A eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit im $\mathbb{R}^{n+1}$ ist.

Beispiel. Sei $\varphi : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ eine glatte Abbildung mit $\nabla\varphi(x) \neq 0$ in $\mathbb{R}^n$. Dann hat für jedes $c \in \mathbb{R}$ die Menge

$$A_c := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \,|\, \varphi(x) \leq c\}$$

einen glatten Rand.

Als Anwendung der lokalen Normalform zeigen wir den folgenden Satz.

Satz 14. *Es sei $A \subset \mathbb{R}^{n+1}$ eine kompakte Menge mit glattem Rand $M := \partial A$. Dann gibt es einen Punkt $P \in M$, in dem alle Hauptkrümmungen positiv sind; insbesondere ist dort die Gauß-Krümmung positiv.*

Beweis. Auf der kompakten Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ nimmt die stetige Funktion $|p|$ ein Maximum R in einem Punkt $P \in \partial M$ an, d.h.

$$M \subset B_R := \{q \in \mathbb{R}^{n+1} \,:\, |q| \leq R\} \quad \text{sowie} \quad |P| = R \,.$$

Nach geeigneter Rotation im Raum können wir $P = (0, \ldots, 0, -R)$ annehmen. Im Punkt P haben dann die Sphäre ∂B_R und der glatte Rand ∂M dieselbe Tangentialebene $N^\perp$ mit dem Normalenvektor $N = (0, \ldots, 0, 1)$.

Wir beschreiben zunächst die Sphäre ∂B_R lokal um P als Graph in der Form

$$v(x) := -\sqrt{R^2 - |x|^2} \quad \text{für } |x| < R\,.$$

Man beachte $v(0) = -R$ und $\nabla v(0) = 0$. Durch Nachrechnen stellt man weiter fest $\partial_{ij} v(0) = \frac{1}{R}\delta_{ij}$.

Mittels Lemma 12 (lokale Normalform) schreiben wir auch ∂M lokal als Graph, d.h. in der Form $(x, u(x))$ für $x \in U$. Dabei ist $u(0) = -R$ und $\nabla u(0) = 0$. Ferner erfüllt die Hesse-Matrix $D^2 u(0) = \mathrm{diag}(\kappa_1, \ldots, \kappa_n)$. Eine Taylorreihen-Entwicklung der Funktionen u und v liefert nun

$$0 \overset{M\subset B_R}{\leq} u(x) - v(x) = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} \Big(\partial_{ij} u(0) - \partial_{ij} v(0)\Big) x_i x_j + O(|x|^3) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\Big(\kappa_i - \frac{1}{R}\Big)(x_i)^2 + O(|x|^3)\,.$$

Für $|x| \to 0$ folgt $\kappa_i \geq \frac{1}{R}$ für $i = 1, \ldots, n$ und insbesondere für die Gauss-Krümmung $K(P) \geq \frac{1}{R^n} > 0$. □

Übung: Formulieren und beweisen Sie einen entsprechenden Satz für Kurven.

Eine *Minimalfläche* ist definiert als eine Fläche mit $2H = \kappa_1 + \kappa_2 \equiv 0$. Offensichtlich gilt für die Gauss-Krümmung einer Minimalfläche $K = \kappa_1 \kappa_2 \leq 0$. Damit erhalten wir

Korollar 15. *Ist A eine Menge, deren glatter Rand ∂A eine Minimalfläche ist, so kann A nicht kompakt sein.*

3.3. **Gauß-Krümmung als Verzerrung der Gauß-Abbildung.** Für nach Bogenlänge parametrisierte ebene Kurven hatten wir in I(5) gesehen, dass $n' = -\kappa c'$ gilt; nach der Substitutionsregel stimmt dies sogar für reguläre Kurven. Die Kurve c bildet ein kleines Intervall des Definitionsbereichs auf eine Kurvenstück ab, dessen Länge in erster Ordnung um den Faktor $|c'|$ gestreckt ist. Wir sehen diesen Faktor als Längenverzerrung der Kurve an. Entsprechend ist das Normalbild $n(t)$ eine Kurve in $\mathbb{S}^1$, die Urbildlängen um den Faktor $|n'|$ verzerrt. Daher können wir die Gleichung $n' = -\kappa c'$ deuten als

$$|\kappa(t)| = \frac{|n'(t)|}{|c'(t)|} = \frac{|\text{Längenverzerrung von } n \text{ in } t|}{|\text{Längenverzerrung von } c \text{ in } t|}.$$

Ganz ähnlich hat Gauß $K(p)$ definiert, und zwar als den Quotienten

$$\frac{|\text{Flächeninhaltsverzerrung von } n \text{ in } p|}{|\text{Flächeninhaltsverzerrung von } f \text{ in } p|}.$$

Im Spezialfall einer linearen Abbildung ℓ ist der Verzerrungsfaktor des Flächeninhalts gerade durch $|\det \ell|$ gegeben. Weil f in erster Ordnung durch df approximiert wird, ist der Nenner des Ausdrucks daher gerade $|\det df_p|$; entsprechend der Zähler $|\det dn_p|$. Wir erhalten also für den Quotienten

$$\frac{|\text{Verzerrung von } dn_p \colon \mathbb{R}^n \to T_p f|}{|\text{Verzerrung von } df_p \colon \mathbb{R}^n \to T_p f|} = \frac{|\det dn_p|}{|\det df_p|} = \big|\det\big((df_p)^{-1} dn_p\big)\big| = |\det S_p| = |K(p)|.$$

Unsere Definition stimmt daher tatsächlich mit der von Gauß überein, jedenfalls im Betrag. Im Kurven- wie im Flächenfall kann man die Gleichungen aber auch ohne Betragsstriche aufstellen, wenn man die Orientierung richtig berücksichtigt; in beiden Fällen verbleibt dann ein Minuszeichen in den Gleichungen.

Beispiele. 1. Für $\mathbb{S}^n$ ist $n = -f$; aus obiger Eigenschaft folgt $|K| = 1$.
2. Für den Zylinder ist das Gaußbild ein Großkreis von $\mathbb{S}^2$, also niederdimensional. Der Flächeninhalt wird also unter n auf das 0-fache verzerrt, und $K \equiv 0$ folgt. Ebenso für die Ebene.

4. ÜBUNGSAUFGABEN

4.1. **Parametrisierte Flächen.**

Aufgabe 1 – Katenoid und Helikoid sind isometrisch

Zwei Immersionen $k, h\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ sind gegeben durch

$$k(x,y) := (\cosh x \cos y, \cosh x \sin y, x), \qquad h(x,y) := (\sinh x \sin y, -\sinh x \cos y, y).$$

Man nennt k das Katenoid *und h das* Helikoid.

a) *Ermitteln Sie die Matrixdarstellungen der ersten Fundamentalformen von k und h und überprüfen Sie, dass diese gleich sind.*
b) *Skizzieren Sie beide Flächen.*
   Tipp: *Stellen Sie sich zunächst die Parameterlinien $x \mapsto k(x,y)$ bzw. $h(x,y)$ sowie $y \mapsto \ldots$ vor.*

Aufgabe 2 – Winkeltreue Parametrisierungen:

Eine Parametrisierung $f : U \to \mathbb{R}^m$ heißt winkeltreu, wenn ihr Differential df_p als lineare Abbildung winkeltreu ist, d.h. wenn

$$\frac{\langle df_p(X), df_p(Y)\rangle}{|df_p(X)||df_p(Y)|} = \frac{\langle X, Y\rangle}{|X||Y|} \quad \text{für } X, Y \in \mathbb{R}^n$$

gilt. Zeigen Sie: f ist genau dann winkeltreu, wenn g in jedem Punkt ein positives Vielfaches der Einheitsmatrix ist, also wenn $g_{ij}(p) = \Lambda(p)\delta_{ij}$ mit einer Funktion $\Lambda : U \to [0, +\infty)$ gilt.

Aufgabe 3 – Parametrisierungen der Sphäre:

Gegeben sei die Sphäre $\mathbb{S}^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 = 1\}$ sowie die beiden Parametrisierungen

$$k(x,y) := (\cos x \cos y, \cos x \sin y, \sin x) \quad \text{für } (x,y) \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \times (0, 2\pi),$$
$$s(x,y) := \frac{1}{x^2+y^2+1}(2x, 2y, x^2+y^2-1) \quad \text{für } (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Man nennt k Parametrisierung in Kugelkoordinaten *und s die Parametrisierung durch* stereographische Projektion.

a) *Zeigen Sie, dass sowohl k als auch s Teilmengen von $\mathbb{S}^2$ parametrisieren. Welche Teilmengen sind dies?*
b) *Zeigen Sie, dass beide Parametrisierungen Immersionen sind, d.h. dk_p und ds_p besitzen vollen Rang für alle p im jeweiligen Definitionsbereich.*
c) *Welche der Parametrisierungen ist winkeltreu?*

Aufgabe 4 – Rotationsflächen:

Gegeben ist die Kurve $c(t) = (r(t), h(t)) : [a, b] \to (0, +\infty) \times \mathbb{R}$. *Wir legen diese Kurve in die* x, z-*Ebene des* $\mathbb{R}^3$ *und rotieren diese Kurve um die* z-*Achse. Dann erhält man die Rotationsfläche*

$$f(t, \varphi) := (r(t) \cos \varphi, r(t) \sin \varphi, h(t)) \quad \text{für } (t, \varphi) \in [a, b] \times [0, 2\pi] \; .$$

a) *Geben Sie eine Bedingung an die Kurve* c *an, so dass* f *eine Immersion ist.*

b) *Berechnen Sie die erste Fundamentalform* $(g_{ij})_{i,j=1,2}$ *der Rotationsfläche.*

c) *Mit Hilfe des Oberflächenelementes (Gramsche Determinante) kann man den Flächeninhalt wie folgt berechnen:*

$$A := \int_a^b \int_0^{2\pi} \sqrt{\det(g_{ij}(t, \varphi))} d\varphi dt \; .$$

Leiten Sie daraus eine Formel zur Berechnung des Flächeninhaltes von Rotationsflächen her.

4.2. **Gauß-Abbildung.**

Aufgabe 5 – Das Vektorprodukt im $\mathbb{R}^{n+1}$:

Um die Normale einer Hyperfläche definieren zu können,benötigen wir das Vektorprodukt im $\mathbb{R}^{n+1}$. *Zu* n *Spaltenvektoren* $X_1, \ldots, X_n \in \mathbb{R}^{n+1}$ *erklären wir deren Vektorprodukt wie folgt*

$$X_1 \wedge \cdots \wedge X_n = \sum_{i=1}^{n+1} \det(X_1, \ldots, X_n, e_i) e_i$$

wobei $e_1, \ldots, e_{n+1}$ *die Einheitsbasis des* $\mathbb{R}^{n+1}$ *ist.*

a) *Zeigen Sie: Das Vektorprodukt* $X_1 \wedge \cdots \wedge X_n$ *steht senkrecht auf jedem* X_k, $k = 1, \ldots, n$.

b) *Zeigen Sie: Das Vektorprodukt ist genau dann gleich Null, wenn die Vektoren* $X_1, \ldots, X_n$ *linear abhängig sind.*

c) *Überlegen Sie sich, dass für* $n = 2$ *das bekannte Kreuzprodukt im* $\mathbb{R}^3$ *entsteht.*

Aufgabe 6 – Gauß-Abbildung einer impliziten Hyperfläche:

Zu $U \subset \mathbb{R}^n$ *sei eine Hyperfläche* $f \in C^k(U, \mathbb{R}^{n+1})$ *mit* $k \in \mathbb{N}$ *gegeben. Die Menge* $f(U)$ *werde implizit beschrieben durch eine Abbildung* $\varphi \in C^1(\mathbb{R}^{n+1}, \mathbb{R})$, *d.h.*

$$f(U) \subset \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \varphi(x) = 0\} \quad \text{und} \quad \nabla\varphi(x) \neq 0 \quad \text{für alle } x \in f(U) \; .$$

a) *Geben Sie die Einheitssphäre und eine Ursprungsebene durch 0 mit Normale* n *in impliziter Form an.*

b) *Zeigen Sie: Für jedes* $p \in U$ *steht der Vektor* $\nabla\varphi(f(p))$ *senkrecht auf allen Tangentialvektoren* $df_p(X) \in T_p f$.

c) *Zeigen Sie, dass die Abbildung* $n(x) := \frac{\nabla\varphi(x)}{|\nabla\varphi(x)|}$ *stetig nach* $\mathbb{S}^n$ *abbildet und somit eine Gauß-Abbildung ist.*

d) *Falls zusätzlich* $\varphi \in C^k(\mathbb{R}^{n+1}, \mathbb{R})$ *gilt, wie glatt ist dann die Abbildung* n*?*

Zusatz: *Kann man zu jeder Hyperfläche f eine implizite Darstellung φ mit obigen Eigenschaften konstruieren?*

Aufgabe 7 – Parallelflächen:

Ist $f\colon U \to \mathbb{R}^{n+1}$, $n\colon U \to \mathbb{S}^n$ Hyperflächenstück, so definieren wir die Parallelfläche *im Abstand s durch*

$$f^s\colon U \to \mathbb{R}^{n+1}, \qquad f^s(p) := f(p) + sn(p).$$

a) Falls f^s Immersion ist, so ist durch n eine Gauß-Abbildung von f^s gegeben.

b) Berechnen Sie die erste Fundamentalform g^s von f^s aus $g =: g^0$.

c) Drücken Sie $\frac{\partial}{\partial s} g^s(X,Y)\big|_{s=0}$ durch die zweite Fundamentalform von f aus.

d) Zeigen Sie: Für jede kompakte Umgebung $p \in V \subset\subset U$ gibt es ein $s_0 > 0$, so dass die Parallelfläche $f^s\colon V \to \mathbb{R}^{n+1}$ eine Immersion darstellt für alle $|s| < s_0$.
Tip*: Sie müssen nur $g^s_p(X,X) > 0$ für $p \in V$ und $X \in \mathbb{S}^{n-1}$ zeigen.*

4.3. **Hauptkrümmungen, Gauß- und mittlere Krümmung.**

Aufgabe 8 – Krümmungen am Beispiel:

Wählen Sie sich einen gekrümmten Körper, z.B. eine Kaffeetasse, einen Stift, Ihren Stuhl, etc. Versuchen Sie die Gebiete mit $K > 0$ und $K < 0$ voneinander abzugrenzen. Können Sie in ausgewählten Punkten auch die Hauptkrümmungsrichtungen bestimmen?

Aufgabe 9 – Skalierung von Flächen:

Zu einer Fläche $f \in C^2(U, \mathbb{R}^{n+1})$ betrachten wir die skalierte Fläche $f_\lambda(p) := \lambda f(p)$ zu einem $\lambda > 0$. Berechnen Sie erste und zweite Fundamentalform von f_λ und daraus mittlere und Gaußkrümmung von f_λ in Abhängigkeit von f.

Aufgabe 10 – Normal- und geodätische Krümmung:

Wir betrachten Kurven auf dem Einheitszylinder $Z = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x^2 + y^2 = 1\}$.

a) Was ist die innere Normale im Punkt $(x,y,z) \in Z$?

b) Wählen Sie (α, β), so dass die Schar von Helices $c(t) = (\cos\alpha t, \sin\alpha t, \beta t)$ nach Bogenlänge parametrisiert ist.

c) Berechnen Sie Normal- und geodätische Krümmung. Für welche Kurven ist die Normalkrümmung extremal?

Beachten Sie, dass wir in dieser Aufgabe ohne Parametrisierung der Fläche auskommen: nur eine Parametrisierung der Kurve wird gebraucht, um deren Krümmungen auszurechnen.

Aufgabe 11 – Katenoid und Helikoid sind minimal:

Wir betrachten wieder Katenoid und Helikoid $k, h \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ *mit*

$$k(x,y) := (\cosh x\, \cos y,\, \cosh x\, \sin y,\, x), \qquad h(x,y) := (\sinh x\, \sin y,\, -\sinh x\, \cos y,\, y).$$

a) Zeigen Sie, dass die Gaussabbildungen n *für* k *und* h *übereinstimmen.*

b) Berechnen Sie $\partial_1 n$ *und* $\partial_2 n$ *und daraus die Weingartenabbildungen.*

c) Ermitteln Sie nun die Hauptkrümmungen sowie mittlere und Gausskrümmung dieser Flächen.

Aufgabe 12 – Weingartenabbildung der Sphäre:

Gegeben ist die Sphäre $\mathbb{S}^n_r = \{p \in \mathbb{R}^{n+1} \mid |p| = r\}$ *vom Radius* r.

a) Zeigen Sie: Für jede beliebige Parametrisierung $f : U \to \mathbb{S}^n_r$ *ist* $n(p) := \frac{1}{r} f(p)$ *eine Gaussabbildung.*

b) Ermitteln Sie nun die Weingartenabbildung und daraus mittlere sowie Gausskrümmung von $\mathbb{S}^n_r$.

Aufgabe 13 – Mittlere Krümmung von Graphen:

Die Fläche $f \in C^2(U, \mathbb{R}^3)$ *sei ein Graph über der* x,y*-Ebene, dass heisst* $f(x,y) = (x, y, u(x,y))$ *für ein* $u \in C^2(U, \mathbb{R})$.

a) Berechnen Sie die erste und zweite Fundamentalform in Abhängigkeit von u.

b) Ermitteln Sie die mittlere Krümmung $H(x,y)$ *der Fläche* f *in Abhängigkeit von* u.

c) Zeigen Sie nun, dass die nichtlineare elliptische Differentialgleichung

$$(1 + u_y^2) u_{xx} - 2 u_x u_y u_{xy} + (1 + u_x^2) u_{yy} = 2H(x,y)(1 + u_x^2 + u_y^2)^{\frac{3}{2}} \quad \text{in } U \tag{11}$$

erfüllt ist.

Aufgabe 14 – Hyperbolisches Paraboloid:

Wir untersuchen das hyperbolische Paraboloid

$$f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \qquad f(x,y) := (x, y, xy).$$

a) Zeigen Sie: Durch jeden Punkt $f(x,y)$ *gehen zwei verschiedene Geraden, welche auf der Fläche liegen. Diese Geraden sind Asymptotenlinien.*
Bemerkung*: Daher gibt es von Geraden berandete Vierecke auf dem Paraboloid, und diese Vierecke werden selbst von zwei Geradenscharen geblättert. Aus diesem Grund setzen Architekten diese Fläche gern als gekrümmte Dachfläche ein.*

b) Eine Fläche $f \in C^2(U, \mathbb{R}^3)$ *besitze im Punkt* $f(x,y)$ *eine Asymptotenlinie.*
Zeigen Sie mit Hilfe der Euler-Formel, dass die Gausskrümmung $K(x,y) \leq 0$ *erfüllt.*
Insbesondere gilt also $K(x,y) \leq 0$ *auf dem hyperbolischen Paraboloid.*

c) Parametrisieren Sie um: Wir bezeichnen die Höhenfunktion mit $u(x,y) := xy$*. Es sei* $\varphi(\tilde{x}, \tilde{y}) = (\tilde{x} + \tilde{y}, -\tilde{x} + \tilde{y})$ *eine 45-Grad-Drehung. Was ist* $\tilde{u} := u \circ \varphi$*? Deuten Sie* (x, y, h) *und* $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{h})$ *im Sinne des Satzes über die lokale Normalform.*

Aufgabe 15 – Affensattel:

Wir betrachten den Graphen $f(x,y) := \big(x, y, u(x,y)\big)$ *mit* $u(x,y) := x^3 - 3xy^2$.

a) *Der Graph ist invariant unter Drehspiegelung um* 60 *Grad um die* z*-Achse, d.h. für* $R(\varphi) := \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$ *gilt* $u \circ R(\frac{\pi}{3}) = -u$. *(Es ist am einfachsten, dafür* $u(2R(x,y)) = -u(2x, 2y)$ *zu zeigen.)*
b) *Wir wollen nun den Graphen* f *verstehen. Notieren Sie in einer Skizze der* (x,y)*-Ebene zuerst die Funktionswerte von* u *entlang der Geraden* $y \mapsto (0,y)$, *sowie diejenigen auf den um Vielfache von 60 Grad rotierten Geraden. Berechnen Sie dann* $u(x,0)$ *und halten Sie auch diese Werte in der Skizze fest, zusammen mit den Werten auf den rotierten Geraden. Warum heißt die Fläche* Affensattel*?*
c) *Überlegen Sie zuerst, welchen Wert die Hauptkrümmungen im Punkt* $(x,y) = 0$ *haben können (denken Sie an die lokale Normalform!). Rechnen Sie dies dann nach, wobei Sie die Formel für die zweite Fundamentalform eines Graphen mit horizontaler Tangentialebene verwenden.*
d) *Zeigen Sie, dass der Graph spiegelsymmetrisch zur* (x,z)*-Ebene ist. Folgern Sie daraus, dass* $x \mapsto f(x,0)$ *eine Krümmungslinie ist. Das gleiche gilt nach Drehungen um Vielfache von 60 Grad. Es gehen daher drei verschiedene Krümmungslinien durch den Nullpunkt.*

Aufgabe 16 – Hauptkrümmung und Symmetrie:

Es sei $f\colon U^2 \to \mathbb{R}^3$ *ein zweidimensionales Flächenstück. Wir nehmen an, dass der Ursprung* $f(p) = 0$ *in der Fläche liegt und der Tangentialraum* $T_p f$ *die* xy*-Ebene ist.*

a) *Es sei* $R_3\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *die Drehung um* $120°$ *um die* z*-Achse. Zeigen Sie: Ist* $f(U)$ *invariant unter der Drehung* R, *so stimmen die Hauptkrümmungen in* p *überein. Man sagt, der Punkt* p *ist ein* Nabelpunkt *[umbilic].*
b) *Gilt das Ergebnis von Teil a) für jede Drehung* R_k *vom Winkel* $2\pi/k$ *mit* $k = 2, 3, \ldots$*?*
c) *Sei* $R_6\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *die Drehung um* $60°$ *um die* z*-Achse und* S *die Spiegelung an der* xy*-Ebene. Zeigen Sie: Ist* $f(U)$ *invariant unter* $R_{\overline{6}} := S \circ R_6$, *so verschwinden beide Hauptkrümmungen in* p. *Man sagt, der Punkt* p *ist ein* Flachpunkt.
d) *Geben Sie ein Beispiel einer (nicht rotationssymmetrischen) Fläche wie in Teil a). Genügt sie auch Teil c)?*

Aufgabe 17 – Flächen, die ganz aus Nabelpunkten bestehen:

Auf Flächen $(n = 2)$ *nennt man Punkte* p *mit* $\kappa_1(p) = \kappa_2(p)$ Nabelpunkte. *Offenbar bestehen* $\mathbb{S}^2_r$ *und* $\mathbb{R}^2$ *ganz aus Nabelpunkten. In dieser Aufgabe beweisen wir die Umkehrung dieser Feststellung:* Sei $f\colon U \to \mathbb{R}^3$ eine Fläche, für die jedes $p \in U$ ein Nabelpunkt ist, also $\kappa_1(p) = \kappa_2(p) =: \kappa(p)$. Dann ist $f(U)$ in einer Ebene oder in einer Sphäre $\mathbb{S}^2_r$ mit $r > 0$ enthalten.

a) *Zeigen Sie zuerst, dass die Funktion* κ *konstant auf* U *ist. Berechnen Sie dazu* $\partial_{12} n(p) - \partial_{21} n(p)$, *und schließen Sie daraus* $0 = \partial_1 \kappa(p) = \partial_2 \kappa(p)$. *Warum zeigt dies, dass* κ *konstant ist?*

b) Zeigen Sie, dass im Falle $\kappa(p) \equiv 0$ die Parametrisierung in einer Ebene liegt.

c) Nun wollen wir zeigen, dass im Fall $\kappa(p) \equiv \kappa \neq 0$ die Fläche $f(U)$ in einer Sphäre vom Radius $\frac{1}{\kappa}$ liegt. Zeigen Sie dazu durch Differentiation, dass $f(p) + \frac{1}{\kappa} n(p)$ konstant ist und daher den Mittelpunkt der gesuchten Sphäre definiert.

Aufgabe 18 – Regelflächen:

Es sei $c\colon [a,b] \to \mathbb{R}^3$ eine reguläre Kurve, und $V\colon [a,b] \to \mathbb{R}^3$ glattes Vektorfeld. Die Fläche

$$f\colon (\alpha,\beta) \times [a,b] \to \mathbb{R}^3, \qquad f(s,t) := c(t) + sV(t).$$

nennt man Regelfläche.

a) Zeigen Sie, dass Zylinder und Kegel Regelflächen sind. Welche weiteren Beispiele von Regelflächen kennen Sie?

b) Zeigen Sie: Das Bild einer Regelfläche unter einer linearen Abbildung $A\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ist wieder Regelfläche.

c) Es seien die Vektoren $c'(t)$ und $V(t)$ für $t \in [a,b]$ linear unabhängig. Zeigen Sie: Es gibt ein $\varepsilon > 0$, so dass $f : (-\varepsilon,\varepsilon) \times [a,b] \to \mathbb{R}^3$ eine Immersion ist. Wir setzen dies von nun an voraus.

d) Zeigen Sie $K(s,t) \leq 0$ für die Gausskrümmung der Regelfläche. Warum gilt $K(s,t) < 0$ genau dann, wenn die Vektoren $V(t), V'(t), c'(t)$ linear unabhängig sind?

e) Eine Regelfläche hat Gauß-Krümmung $K \equiv 0$ genau dann, wenn die Normale n längs jeder Regelgeraden konstant ist.

Aufgabe 19 – Rotationsfläche der Traktrix:

Wir betrachten die Traktrix

$$(r,h)(t) := \Big(\frac{1}{\cosh t}, t - \tanh t\Big) \quad \textit{für}\, t > 0$$

und untersuchen nun die von ihr erzeugte Rotationsfläche $f(t,\varphi) = \big(r(t)\cos\varphi, r(t)\sin\varphi, h(t)\big)$.

a) Berechnen Sie die beiden Hauptkrümmungen κ_1 und κ_2 dieser Fläche.

b) Zeigen Sie nun, dass die Gausskrümmung dieser Fläche konstant ist.

Aufgabe 20 – Rotationsflächen konstanter Gauß-Krümmung:

Zu der nach Bogenlänge parametrisierten Meridiankurve $(r,h)(t)\colon (a,b) \to \mathbb{R}^2$, $r'^2 + h'^2 = 1$, betrachten wir die erzeugte Rotationsfläche. Wir wollen alle solche Flächen mit konstanter Gauskrümmung $K \equiv c$ untersuchen.

a) Warum braucht man nur die Rotationsflächen mit $K \equiv -1, 0, +1$ zu ermitteln, wenn man alle Rotationsflächen mit konstantem K bestimmen möchte?

b) Leiten Sie aus $K \equiv c$ eine gewöhnliche Differentialgleichung für r her und lösen Sie diese. Geben Sie danach eine Integraldarstellung der Funktion h an.
Hinweis: Betrachten Sie getrennt die drei Fälle $c < 0$, $c = 0$, $c > 0$.

c) *Geben Sie im Fall $K \equiv 0$ explizit die Funktionen r und h an. Welche Rotationsflächen ergeben sich hier?*

d) *Wir betrachten nun den Fall $K \equiv 1$. Zeigen Sie, dass $r(t) = a\cos t$ zu $a > 0$ eine Lösung der Differentialgleichung aus a) ist. Berechnen Sie $h(t)$ im Falle $a = 1$ explizit und skizzieren Sie die Meridiankurve. Im Falle $0 < a < 1$ und $a > 1$ lässt sich h nicht mehr elementar darstellen, Sie können Sie jedoch qualitative Aussagen (Definitionsbereich, Wertebereich und Monotonie von r und h) angeben und somit ebenfalls für diese Fälle die Meridiankurve skizzieren.*

Bemerkung: *Ebenso kann man auch für $K \equiv -1$ vorgehen; Mit der Traktix haben wir ein Beispiel für diesen Fall bereits konstruiert.*

Aufgabe 21 – Tangentialebene:

Zeigen Sie für eine Fläche $f \in C^2(U, \mathbb{R}^3)$ die folgenden Aussagen:

a) *Gilt für die Gausskrümmung $K(p) > 0$ in einem Punkt $p \in U$, so gibt es eine offene Umgebung $V \subset U$ von p, so dass $f(V)$ auf einer Seite der Tangentialebene $T_p f$ liegt.*

b) *Gilt andererseits $K(p) < 0$, so existieren in jeder Umgebung $V \subset U$ von p zwei Punkte $p_1, p_2 \in V$, so dass $f(p_1)$ und $f(p_2)$ auf verschiedenen Seiten der Tangentialebene $T_p f$ liegen.*

Aufgabe 22 – Asymptotenrichtungen:

Es sei $f\colon U \to \mathbb{R}^{n+1}$ eine Hyperfläche. Ein Vektor $X \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ heißt Asymptotenrichtung *in $p \in U$, wenn die Normalkrümmung $g_p(S_p X, X) = 0$ erfüllt. Benutzen Sie die Eulerformel um für zweidimensionale Flächen $f\colon U^2 \to \mathbb{R}^3$ zu zeigen:*

a) *Die Gaußkrümmung ist genau dann in einem Punkt p negativ, wenn durch p genau zwei linear unabhängige Asymptotenrichtungen gehen.*

b) *Die zwei Hauptkrümmungen sind entgegensetzt gleich, d.h. sie sind $\pm\kappa \neq 0$, genau dann, wenn die Asymptotenrichtungen aufeinander senkrecht stehen.*

Aufgabe 23 – Flächen mit verschwindender mittlerer und Gausskrümmung:

Auf $U \subset \mathbb{R}^2$ zusammenhängend sei ein Flächenstück $f \in C^2(U, \mathbb{R}^3)$ gegeben, für welches zugleich $H \equiv 0$ und $K \equiv 0$ gelte. Zeigen Sie, dass f in einer Ebene enthalten ist, indem Sie wie folgt vorgehen:

a) *Zeigen Sie zunächst, dass die Weingartenabbildung und somit die zweite Fundamentalform die Null-Matrix sind.*

b) *Folgern Sie, dass die Gaussabbildung $n(p)$ konstant ist und somit die Fläche in einer Ebene liegt.*

c) *Gilt obige Aussage auch im Falle von Hyperflächen im $\mathbb{R}^{n+1}$ falls $n \geq 3$?*

Aufgabe 24 – Scherksche Minimalfläche:

Laut (11) *ist ein Graph* $f(x,y) = (x, y, u(x,y))$ *eine* Minimalfläche, *d.h. seine mittlere Krümmung ist null, falls die Differentialgleichung*

$$(1+u_y^2)u_{xx} - 2u_x u_y u_{xy} + (1+u_x^2)u_{yy} = 0$$

gilt. Wir wollen nun eine Minimalfläche der speziellen Form $u(x,y) = g(x) + h(y)$ *finden. Diese wird Scherksche Minimalfläche genannt.*

a) *Zeigen Sie zunächst, dass es eine Konstante* $a \in \mathbb{R}$ *gibt, so dass*

$$\frac{g''(x)}{1+g'(x)^2} = a = -\frac{h''(y)}{1+h'(y)^2} \quad \textit{für alle } x, y$$

gilt.

b) *Lösen Sie nun diese beiden gewöhnlichen Differentialgleichungen zu den Anfangswerten* $g(0) = h(0) = g'(0) = h'(0) = 0$. *Was ist der maximale Definitionsbereich der Lösung?* *(Hinweis:* $\frac{d}{dt} \log \cos t = -\tan t$.*)*

Aufgabe 25 – Parallelflächen:

Zu einer Fläche $f : U \to \mathbb{R}^3$ *mit ihrer Normalen* n *erklären wir die Parallelfläche*

$$f^s : U \to \mathbb{R}^3 \quad , \quad f^s(x,y) := f(x,y) + sn(x,y) \quad \textit{in } U \,.$$

Für hinreichend kleines $|s|$ *sind diese Parallelflächen auch wieder Immersionen.*

a) *Zeigen Sie, dass* n *ebenfalls eine Normale für die Parallelfläche* f_s *ist.*

b) *Sei die Fläche* f *nun in Krümmungslinienparametern parametrisiert, d.h.* $n_x = -\kappa_1 f_x$ *und* $n_y = -\kappa_2 f_y$ *mit den beiden Hauptkrümmungen* κ_1, κ_2. *Zeigen Sie*

$$\sqrt{\det g_s} = \sqrt{\det g}\Big(1 - 2Hs + Ks^2\Big) \,,$$

für die erste Fundamentalform g_s *von* f_s *und hinreichend kleines* $|s|$. *Dabei sind* H *die mittlere und* K *die Gausskrümmung von* f.

c) *Gilt diese Formel auch, wenn* f *nicht in Krümmungslinienparametern parametrisiert ist?*

Aufgabe 26 – Zweite Fundamentalform einer impliziten Fläche:

Wir führen Aufgabe 6 weiter. Sei also $f\colon U \subset \mathbb{R}^n \to V \subset \mathbb{R}^{n+1}$ *ein Flächenstück, das durch* $\varphi \in C^2(V, \mathbb{R})$ *implizit beschrieben wird, d.h. es gilt* $M := \{f(x) : x \in U\} = \{p \in V : \varphi(p) = 0\}$ *und insbesondere* $\varphi \circ f = 0$.

Wir nehmen der Einfachheit halber an, dass sogar $|\nabla\varphi(p)| = 1$ *für alle* $p \in M$ *gilt. Man kann dies stets durch Multiplikation mit einer geeigneten Funktion (welcher?) erreichen. Dann ist* $\tilde{n} := \nabla\varphi$ *auf* V *definiert und* $n := \tilde{n} \circ f$ *die Gauß-Abbildung des Flächenstücks.*

a) *Berechnen Sie mit der Kettenregel als eine Vorübung* $\partial_i n^l = \partial_i(\tilde{n}^l \circ f)$, *d.h. die* i*-te Ableitung der* l*-ten Komponente der Normale; verwenden Sie am besten die Summenschreibweise.*

b) Berechnen Sie nun die Koeffizienten b_{ij} *der zweiten Fundamentalform in Summenschreibweise.*

c) Drücken Sie b_{ij} *nur durch die Hesseform von* φ *sowie* f *und die Standardbasis aus (keine Summenschreibweise). Bestimmen Sie* $b(X, Y) = b\big(\sum_i X^i e_i, \sum_j Y^j e_j\big)$*, indem Sie ebenfalls ohne Summen schreiben.*

Aufgabe 27 – Stützkugel:

Gegeben sei eine Hyperfläche $f : U \to \mathbb{R}^{n+1}$ *der Normalen* n *und* $0 \in U$*. Für ein* $R > 0$ *gelte*

$$f(0) = (0, \ldots, 0, -R) \quad , \quad n(0) = (0, \ldots, 0, 1) \quad \textit{sowie} \quad \kappa_i(0) > \frac{1}{R} \quad \textit{für } i = 1, \ldots, n\,.$$

Zeigen Sie, dass dann f *lokal um* 0 *in der Kugel* $B_R := \{p \in \mathbb{R}^{n+1} \,:\, |p| < R\}$ *befindet, d.h. es gibt eine Menge* $V \subset U$ *mit* $0 \in V$ *und* $f(V) \subset \overline{B_R}$ *und* $f(V \backslash \{0\}) \subset B_R$*. :*

Teil 3. Die innere Geometrie von Flächenstücken

Die *innere Geometrie* von Flächen enthält alle diejenigen Größen, welche sich rein aus der ersten Fundamentalform der Fläche ermitteln lassen. Dazu gehört beispielsweise die Länge von Kurve auf Flächen oder auch der Flächeninhalt der Fläche. Für 2-dimensionale Flächen werden wir jedoch das erstaunliche Ergebnis finden, dass auch die Gauss-Krümmung zur inneren Geometrie gehört. Ebenfalls werden wir spezielle Kurven auf Flächen behandeln, die sogenannten Geodätischen. Diese stellen eine Verallgemeinerung des Begriffes der kürzesten Kurve zwischen zwei gegebenen Punkten dar. Sie sind ebenfalls Größen der inneren Geometrie.

1. Hyperflächengleichung und Integrabilitätsbedingungen

1.1. Orthogonale Zerlegung von $d^2 f$ und Christoffel-Symbole. Als erste weitere Größen der inneren Geometrie werden wir die Christoffel-Symbole behandeln. Für einen Vektor $V \in \mathbb{R}^{n+1}$ erklären wir zunächst in tangentiale und normale Anteile wie folgt

$$V = V^\top + V^\perp := \Big(V - \langle V, n\rangle n\Big) + \langle V, n\rangle n\ .$$

und erklären

Definition. Die *Christoffel-Symbole* eines Hyperflächenstückes (f, n) sind die Funktionen $\Gamma_{ij}^k : U \to \mathbb{R}$ für $1 \leq i, j, k \leq n$, definiert durch

$$(1) \qquad \partial_{ij} f^\top = \partial_{ij} f - \langle \partial_{ij} f, n\rangle n =: \sum_k \Gamma_{ij}^k(p)\partial_k f\ .$$

also gerade als die tangentialen Anteile der zweiten Ableitungen von f.

Bemerkung. (i) Da $\partial_1 f, \ldots, \partial_n f$ eine Basis des Tangentialraumes $T_p f$ bilden, sind die Christoffel-Symbole eindeutig definiert. (ii) Nach dem Satz von Schwarz ist $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$.

Beispiele. 1. Ist f linear, so verschwinden die Christoffel-Symbole. Die Fläche ist dann eine Hyperebene.

2. Wählt man eine gekrümmte (nichtlineare) Parametrisierung der Ebene $\mathbb{R}^2$ wie etwa $(x, y) \mapsto \big(\sinh x, y(y^2 + 1)\big)$, so verschwinden die Christoffelsymbole nicht.

Um die Christoffel-Symbole gemäß ihrer Definition zu berechnen, benötigt man die Normale n der Fläche, um den tangentialen Anteil $(\partial_{ij} f)^\top$ zu ermitteln. Es scheint also, als ob die Christoffel-Symbole keine Größen der inneren Geometrie sind.

Sie sind es tatsächlich aber doch, wie folgendes Lemma zeigt.

Lemma 1. *(Christoffel-Symbole als Größen der inneren Geometrie)*
Die Christoffel-Symbole Γ_{ij}^k sind allein durch die erste Fundamentalform bestimmt:

$$(2) \qquad \Gamma_{ij}^l = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^n g^{lk}\Big(\partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ik} - \partial_k g_{ij}\Big) \qquad \text{für } 1 \leq i, j, l \leq n$$

Dabei sind g_{ij} die Einträge von g und g^{ij} die Einträge der Inversen g^{-1}.

Beweis. Wir berechnen die Terme der rechten Seite:

$$\begin{aligned}\partial_i g_{jk} = \partial_i\langle\partial_j f, \partial_k f\rangle &= \langle\partial_{ij} f, \partial_k f\rangle + \langle\partial_j f, \partial_{ik} f\rangle\\ \partial_j g_{ki} = \quad &\langle\partial_{jk} f, \partial_i f\rangle + \langle\partial_k f, \partial_{ji} f\rangle\\ -\partial_k g_{ij} = &-\langle\partial_{ki} f, \partial_j f\rangle - \langle\partial_i f, \partial_{kj} f\rangle\end{aligned}$$

Als Summe erhalten wir

$$\frac{1}{2}\big(\partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ik} - \partial_k g_{ij}\big) = \langle\partial_{ij} f, \partial_k f\rangle \overset{\partial_k f \in Tf}{=} \big\langle(\partial_{ij} f)^\top, \partial_k f\big\rangle = \big\langle \textstyle\sum_\mu \Gamma_{ij}^\mu \partial_\mu f, \partial_k f\big\rangle = \displaystyle\sum_\mu \Gamma_{ij}^\mu g_{\mu k}.$$

Es folgt

$$\sum_k \frac{1}{2}\big(\partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ik} - \partial_k g_{ij}\big) g^{kl} = \sum_{k,\mu} \Gamma_{ij}^\mu g_{\mu k} g^{kl} = \sum_\mu \Gamma_{ij}^\mu \delta_\mu^l = \Gamma_{ij}^l. \qquad \square$$

Beispiel. Aus dem vorigen Kapitel wissen wir, dass eine Parametrisierung längentreu ist genau dann, wenn $g_{ij} = \delta_{ij}$ in jedem Punkt p gilt. Bei längentreuen Parametrisierungen verschwinden also alle Christoffel-Symbole.

1.2. **Die Hyperflächengleichungen.** Für eine auf Bogenlänge parametrisierte Kurve c mit Normale n so erfüllen c, n ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen, die sogenannten Frenet-Gleichungen, in welchen die Krümmung κ der Kurve eingeht. Diese sind bei vorgegebenen Anfangsbedingungen tatsächlich eindeutig lösbar (Hauptsatz der Kurventheorie). Durch Umparametrisierung können wir natürlich auch eine ebene Kurve finden, für die wir die beiden Größen $|c'|, \kappa$ festlegen.

Ist nun f ein Hyperflächenstück mit Normale n, so werden die bei Kurven verwendeten Größen $|c'|, \kappa$ durch entsprechende Ausdrücke ersetzt:
- Die erste Fundamentalform g. Durch deren Ableitungen ergeben sich dann die Christoffel-Symbole Γ gemäß (2).
- Die zweite Fundamentalform b, für welche die Normale n der Fläche benötigt wird. Wenn wir g schon kennen, ist dies äquivalent zur Kenntnis der Weingartenabbildung S gemäß $S = g^{-1}b$.

So wie für Kurven wollen wir nun für Hyperflächen ein System von Differentialgleichungen angeben –diesmal partiell–, das zu gegebenen Fundamentalformen g, b von f, n erfüllt wird:

Satz 2. *(Die Hyperflächengleichungen)*
Sei $f : U \to \mathbb{R}^{n+1}$ ein parametrisiertes Hyperflächenstück mit der Normalen n und

$$g_{ij} := \langle\partial_i f, \partial_j f\rangle, \qquad b_{ij} := \langle\partial_{ij} f, n\rangle \qquad \text{für } 1 \le i, j \le n;$$

weiterhin benutzen wir als abkürzende Schreibweise $\Gamma_{ij}^l := \sum_k \frac{1}{2} g^{lk}\big(\partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ik} - \partial_k g_{ij}\big)$. Dann gilt das folgende System von partiellen Differentialgleichungen für f, n auf U, genannt Hyperflächengleichungen*: Die* (Gaußsche) Ableitungsgleichung

$$\partial_{ij} f = \sum_k \Gamma_{ij}^k \,\partial_k f + b_{ij} n \qquad \text{für } 1 \le i, j \le n \tag{3}$$

und die Weingarten-Gleichung

$$\partial_j n = -\sum_{i,k} g^{ik} b_{kj} \partial_i f \qquad \textit{für } 1 \leq j \leq n. \tag{4}$$

Beweis. Die Gaußsche Ableitungsgleichung ergibt sich als die Tangential- Normalzerlegung der zweiten Ableitungen $\partial_{ij} f$. In (1) hatten wir die Christoffelsymbole durch die Tangentialkomponente der zweiten Ableitungen definiert. Die zweite Fundamentalform $b_{ij} = \langle \partial_{ij} f, n \rangle$ gibt die Normalkomponente.

Die definierende Gleichung für S ist lautet $dn(V) = -df(SV)$, bzw. $\partial_j n = dn(e_j) = -df(Se_j) = -df(g^{-1} b e_j)$, woraus die Weingarten-Gleichung folgt. $\square$

Sind g und b gegeben, so kann man nach der Lösbarkeit der Hyperflächengleichungen fragen, genauer:
• Eindeutigkeit: Ist die Lösung f, n eindeutig zu gegebenen Anfangsbedingungen, d.h. haben wir mit g, b alle *Invarianten* von parametrisierten Flächenstücken gefunden?
• Existenz: Gibt es stets eine Lösung oder sind g, b noch durch weitere notwendige Bedingungen verknüpft?

Die Antwort auf die erste Frage liefert ein Eindeutigkeitssatz:

`11. Vorlesung, Mittwoch 4.7.07` ______________________________

Satz 3. *Es seien gegeben ein Gebiet $U \subset \mathbb{R}^n$, $p \in U$, sowie matrixwertige Funktionen $g, b\colon U \to \mathbb{R}^{n^2}$. Gibt es eine Lösung $f\colon U \to \mathbb{R}^{n+1}$, $n\colon U \to \mathbb{S}^n$ der Hyperflächengleichungen* (3), (4)*, so ist diese eindeutig bestimmt durch die Anfangswerte $f(p)$, df_p, $n(p)$.*

Natürlich kann es nur dann eine Lösung geben, wenn vorgegebenen Daten g und b konsistent gewählt sind, z.B. müssen g und b symmetrisch und zusätzlich g positiv definit sein. Allerdings müssen g und b noch weitere Bedingungen erfüllen, die sogenannten Integrabilitätsbedingungen, damit eine Lösung existiert. Weiterhin kann die Eindeutigkeit nur bei Vorgabe der Anfangswerte gelten, denn die Hyperflächengleichungen sind invariant gegenüber Bewegungen (Translationen, Rotationen). Hat man also eine Lösung (f, n) der Hyperflächengleichungen gegeben, so ist auch (Af, An) eine Lösung, wenn A orthogonal ist.

Beweis. Es sei $q \in U$ beliebig. Da U ein Gebiet ist, können wir eine glatte Kurve $\gamma\colon [0,1] \to U$ fixieren, die von $\gamma(0) = p$ nach $\gamma(1) = q$ läuft. Weiterhin sei ein parametrisiertes Flächenstück $f\colon U \to \mathbb{R}^{n+1}$, $n\colon U \to \mathbb{S}^n$ mit Daten g, b, und damit auch Γ, gegeben.

Wir verwenden nun die Hyperflächengleichungen längs γ. Die Einschränkungen

$$N(t) := n\big(\gamma(t)\big) \quad , \quad X_i(t) := \partial_i f\big(\gamma(t)\big) \quad , \quad \tilde{f}(t) := f \circ \gamma(t)$$

erfüllen

$$
\begin{aligned}
N' &= \sum_j \Big(\partial_j n \circ \gamma\Big)\,\gamma'^j \overset{(4)}{=} -\sum_{i,j,l} g^{il} b_{lj}\,\partial_i f\,\gamma'^j = -\sum_{i,j,l} g^{il} b_{lj} X_i\,\gamma'^j, \\
X'_i &= \sum_j \Big(\partial_{ij} f \circ \gamma\Big)\,\gamma'^j \overset{(3)}{=} \sum_j \Big(\textstyle\sum_l \Gamma^l_{ij} X_l + b_{ij} N\Big)\gamma'^j, \qquad (5)\\
\tilde{f}' &= (f\circ\gamma)' = \sum_i X_i \gamma'^i,
\end{aligned}
$$

wobei auf den rechten Seiten die gegebenen Funktionen g, b, Γ in der Kurve γ auszuwerten sind. Dies stellt ein System linearer gewöhnlicher Differentialgleichungen für $N, X, \tilde{f}$ dar, dessen Koeffizienten $g\circ\gamma$, $b\circ\gamma$, $\Gamma\circ\gamma$, γ glatt sind.

Nach dem Existenz- und Eindeutigkeitssatz von Picard-Lindelöff wird jede Lösung $N, X, \tilde{f}$ des Systems (5) auf dem Intervall $[0,1]$ eindeutig durch ihre Anfangswerte in $t=0$ bestimmt, d.h. durch $N(0) = n(p)$, $X(0) = df_p$, $\tilde{f}(0) = f\big(\gamma(0)\big) = f(p)$. Insbesondere ist $f(q) = \tilde{f}(1)$, $n(q) = N(1)$ die einzige Lösung der Hyperflächengleichungen im Punkt q. □

Man fragt sich nun natürlich, wann zu vorgegebener erster und zweiter Fundamentalform man eine entsprechende Hyperfläche konstruieren kann. Durch die Lösung der gewöhlichen Differentialgleichungen (5) entlang geeigneter Wege erhält man einen möglichen Kandidaten für eine Lösung. Es ist aber noch nicht klar, dies wirklich eine Hyperfläche erklärt. Man muss nämlich zeigen, dass die konstruierte Lösung unabhängig von der Wahl des Weges ist. Weiterhin ist gar nicht klar, ob das durch Lösen der gewöhnlichen DGL konstruierte N wirklich die Normale an die Fläche ist, also ob N wirklich Länge 1 hat und senkrecht auf den Tangentialvektoren X_i steht.

1.3. **Integrabilitätsbedingungen und Hauptsatz der Flächentheorie.** Wie bereits erwähnt, kann die Existenz von Hyperflächenstücken (f, n) bei vorgegebenem g und b nur dann gelten, wenn neben der Symmetrie von g und b noch nur dann, wenn zusätzlich zu (3) (4) noch weitere Gleichungen erfüllt sind.

Aus dem Satz von Schwarz folgt, dass in jedem Punkt von U gelten muss

$$\partial_{ijk} f = \partial_{jik} f \qquad \text{für alle } 1 \le i,j,k \le n.$$

Diese Bedingungen folgen jedoch nicht aus den Hyperflächengleichungen. Vielmehr stellen sie notwendige Bedingungen dar, die die Fundamentalformen g, b erfüllen müssen, wenn sie die Daten einer Fläche sein sollen.

Satz 4. *Für jede Lösung* (f, n) *der Hyperflächengleichungen* (3)(4) *gelten die* Gauß-Gleichung

$$\partial_i \Gamma^s_{jk} - \partial_j \Gamma^s_{ik} + \sum_{r=1}^n \Gamma^r_{jk}\Gamma^s_{ir} - \Gamma^r_{ik}\Gamma^s_{jr} = \sum_{r=1}^n \big(b_{jk} b_{ir} - b_{ik} b_{jr}\big) g^{rs} \quad \textit{für } 1 \le i,j,k,s \le n, \tag{6}$$

sowie die (Mainardi-)Codazzi-Gleichung

$$0 = \partial_i b_{jk} - \partial_j b_{ik} + \sum_{s=1}^n \Gamma^s_{jk} b_{is} - \Gamma^s_{ik} b_{js} \quad \textit{für } 1 \le i,j,k \le n. \tag{7}$$

In der Gauß-Gleichung haben wir die Terme so angeordnet, dass die Gleichung eine interessante Interpretation erlaubt: Die linke Seite hängt nur von g ab, und gehört damit der inneren Geometrie an, während die rechte Seite alle Terme enthält, die von b abhängen. Damit verknüpft die Gauß-Gleichung innere und äußere Geometrie.

Beweis.

$$\begin{aligned}
\partial_i\partial_{jk}f &\overset{(3)}{=} \partial_i\Big(\sum_s \Gamma_{jk}^s\,\partial_s f + b_{jk}n\Big) \\
&= \sum_s \Big(\partial_i\Gamma_{jk}^s\,\partial_s f + \Gamma_{jk}^s\partial_{is}f\Big) + \partial_i b_{jk}\,n + b_{kj}\partial_i n \\
&\overset{(3)(4)}{=} \sum_s \partial_i\Gamma_{jk}^s\,\partial_s f + \sum_s \Gamma_{jk}^s\Big(\textstyle\sum_r \Gamma_{is}^r\partial_r f + b_{is}n\Big) + \partial_i b_{jk}\,n - \displaystyle\sum_{r,s} b_{jk}\big(b_{ir}g^{rs}\partial_s f\big) \\
&= \sum_s \Big(\partial_i\Gamma_{jk}^s + \textstyle\sum_r\big(\Gamma_{jk}^r\Gamma_{ir}^s - b_{jk}b_{ir}g^{rs}\big)\Big)\partial_s f + \Big(\textstyle\sum_s \Gamma_{jk}^s b_{is} + \partial_i b_{jk}\Big)n
\end{aligned}$$

Um den entsprechenden Ausdruck für $\partial_j\partial_{ik}f$ zu erhalten, müssen wir nur i und j vertauschen. Man erhält dann $0 = \partial_i\partial_{jk}f - \partial_j\partial_{ik}f$, ausgedrückt als eine Linearkombination der Basisvektoren $\partial_1 f,\dots,\partial_n f, n$. Also verschwinden die Koeffizienten. Die Koeffizienten von $\partial_s f$ stellen aber die Gauß-Gleichung dar, die Koeffizienten von n die Codazzi-Gleichung. Wir halten also fest: die Gauß-Gleichung ist die Tangentialkomponente eines Kommutators von dritten Ableitungen von f, während die Codazzi-Gleichung die Normalkomponente darstellt. □

Für die Gauß-Abbildung muss nach dem Satz von Schwarz gelten $\partial_{ij}n = \partial_{ji}n$. Man kann nachrechnen, dass diese Gleichung keine weiteren Bedingungen ergibt. Auch die Vertauschbarkeit der dritten und höheren Ableitungen von f liefert keine neuen Bedingungen, sondern nur Ableitungen der Gleichungen von Gauß und Codazzi. Daher erwartet man das folgende Existenzresultat:

Satz 5 (Hauptsatz der Flächentheorie, Bonnet)**.**
(i)Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ (mit $n \geq 2$) offen, einfach zusammenhängend, $p_0 \in U$.
(ii) Weiter seien symmetrische Matrizenfunktionen $g, b\colon U \to \mathbb{R}^{n\times n}$ gegeben, wobei g zusätzlich positiv definit sei; sie sollen den Gleichungen von Gauß (6) *und Codazzi* (7) *genügen.*
(iii)Es seien Anfangsdaten $P_0 \in \mathbb{R}^{n+1}$, $V_1,\dots,V_n \in \mathbb{R}^{n+1}$ sowie $N_0 \in \mathbb{S}^n$ so gegeben, dass $V_1,\dots,V_n$ lin. unabhängig sind und die Kompatibilitätsbedingungen $\langle V_i, N_0\rangle = 0$ für $i = 1,\dots,n$ gelten.

Dann existert genau eine Lösung $f\colon U \to \mathbb{R}^{n+1}$, $n\colon U \to \mathbb{S}^n$ der Hyperflächengleichungen (3) *und* (4) *zu den Anfangswerten $f(p_0) = P_0$, $\partial_i f(p_0) = V_i$, $n(p_0) = N_0$.*

Wir lassen den Beweis aus, geben aber die Idee dazu an. Um $f(q)$ zu bestimmen, integriert man, wie im Beweis des Eindeutigkeitssatzes, das Differentialgleichungssystem (5) längs einer Kurve γ von p nach $q \in U$. Man benutzt die Gauß- und Codazzi-Gleichungen (6) (7), um zu zeigen, dass $f(q)$ unabhängig von der gewählten Kurve ist; aus diesem Grund nennt man diese Gleichungen auch *Integrabilitätsbedinungen.* Man kann für alle Schritte bis hierher aber auch einen allgemeinen Satz zitieren (dies tun beispielsweise [dC,K]): Der Satz von Frobenius sagt, dass für die Integrabilität des Systems erster Ordnung für f, X, N die Vertauschbarkeit der zweiten Ableitungen von $X = \partial f$ und n hinreichend ist (siehe [S] I, Kapitel 6). Abschließend muss man nachprüfen, dass tatsächlich n die Gaußabbildung von f und dass g, b die Fundamentalformen von f sind.

1.4. **Theorema egregrium.** Dieser (wörtlich:) herausragende Satz ist die Aussage, dass die Gauß-Krümmung einer zweidimensionalen Fläche, auch wenn sie als Produkt der beiden Hauptkrümmungen definiert ist, gleichwohl zur inneren Geometrie gehört. Anderes gilt für die mittlere Krümmung: Zylinder bzw. Ebene sind innergeometrisch nicht zu unterscheiden, denn man kann $g_{ij} = \delta_{ij}$ bei beiden Flächen erreichen. Jedoch haben sie $H = \frac{1}{2}$ bzw. $H = 0$.

Das Theorema egregium ist als Aussage erstaunlich: Indizien, warum es gelten sollte, gibt es wenige. Eines lautet: Wenn man die Normale von n zu $-n$ wechselt, so verändert sich zwar κ_i zu $-\kappa_i$, $i = 1, 2$, aber das Produkt $K = \kappa_1\kappa_2$ verändert sein Vorzeichen nicht! Dasselbe gilt übrigens in allen geraden Raumdimensionen $n \geq 2$.

Auch unser Beweis erklärt diesen Sachverhalt nicht; er folgt aber unmittelbar aus der für Satz 4 geleisteten Arbeit.

Satz 6. *(Theorema egregium, Gauss 1827)*
Die Gauss-Krümmung K eines parametrisierten Flächenstücks $f\colon U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ hängt nur von seiner ersten Fundamentalform und ihren ersten beiden Ableitungen ab.

Beweis. Wir bezeichnen mit R^s_{ijk} die linke Seite der Gauss-Gleichung (6), und multiplizieren sie mit g_{st}. Wegen $\sum_s g^{rs} g_{st} = \delta^r_t$ erhalten wir

$$\sum_{s=1}^{n} g_{st} R^s_{ijk} = b_{jk} b_{it} - b_{ik} b_{jt} \quad \text{für } 1 \leq i, j, k, t \leq n.$$

Für $n = 2$ wollen wir die rechte Seite als Determinante schreiben und setzen dazu $i = t = 1$ und $j = k = 2$:

$$g_{11} R^1_{122} + g_{21} R^2_{122} = b_{22} b_{11} - b^2_{12} = \det b. \tag{8}$$

Also erhalten wir für die Gauß-Krümmung nach Satz II.9

$$K = \frac{\det b}{\det g} = \frac{g_{11} R^1_{122} + g_{21} R^2_{122}}{\det g}. \tag{9}$$

Nach (6) hängt die rechte Seite nur von g, Γ und ersten Ableitungen von Γ ab. Zusammen mit Lemma 1 folgt die Behauptung. □

Bemerkung. Die linke Seite von (8) erscheint willkürlich, und ist scheinbar unsymmetrisch in den Indices. Man fasst die linke Seite daher als eine *Spurbildung bezüglich g* auf, indem man definiert $R_{uvxy} := \sum_t g_{ut} R^t_{vxy}$. Damit vereinfacht sich (9) auf $K = R_{1221}/\det g$. Ein anschaulicher (intrinsischer) Krümmungsbegriff in höheren Dimensionen $n \geq 2$ wird durch eine Verallgemeinerung von diesem Ausdruck, die sogenannte *Schnittkrümmung*, gegeben; dies ist Gegenstand der Riemannschen Geometrie.

Die Gaußsche Krümmung ist damit eine *Biegeinvariante*: sie bleibt unter allen Verbiegungen einer Fläche erhalten. Im Gegensatz zu Flächen besitzen Kurven keine Biegeinvarianten, denn die Bogenlängenfunktion bildet sie (lokal) stets längentreu auf $\mathbb{R}$ ab.

Beispiele. 1. Abwickelbare Flächen (Zylinder, Kegel, ...) haben $g_{ij} = \delta_{ij}$ und daher auch $K \equiv 0$.
2. Die 2-Sphäre hat in jedem Punkt $K \equiv 1$. Somit keine noch so kleine Teilmenge von $\mathbb{S}^2$ längentreu parametrisiert werden, da man ansonsten $g_{ij} = \delta_{ij}$ in dieser Teilmenge hätte, woraus dann aber $K \equiv 0$ folgen würde. Daraus folgt die bekannte Tatsache: Es gibt keine verzerrungstreue Erdkarte.
3. Katenoid und Helikoid haben in geeigneten Parametrisierungen $f, \tilde{f} \colon U \to \mathbb{R}^3$ dieselben ersten Fundamentalformen $g = \tilde{g}$ (siehe Übungsaufgabe). Deshalb stimmen die Gauß-Krümmungen hier in den entsprechenden Punkten überein, $K(p) = \tilde{K}(p)$; eine Rechnung zeigt, dass sie nicht konstant sind.

Wie bereits erwähnt, nennt man eine Fläche abwickelbar, wenn sie sich längentreu parametrisieren läßt. Dazu äquivalent ist, dass man eine Parametrisierung mit $g_{ij} = \delta_{ij}$ findet. Solche Flächen müssen dann $K \equiv 0$ haben. Allerdings gilt auch die Rückrichtung, was wir ohne Beweis notieren.

Satz 7. *(Charakterisierung abwickelbarer Flächen)*
Eine Fläche lässt sich genau dann längentreu parametrisieren, wenn ihre Gauss-Krümmung verschwindet, also $K \equiv 0$ ist.

Beispiel. Der Kegel $f(x, y) = (y \cos x, y \sin x, y)$ hat Gauss-Krümmung $K \equiv 0$. Er lässt sich also längentreu parametrisieren. Als Übungsaufgabe: Man ermittele eine längentreue Parametrisierung des Kegels.

`12. Vorlesung, Mittwoch 11.7.07` ———

2. GEODÄTISCHE AUF FLÄCHEN

2.1. **Geodätische.** Wir betrachten in diesem Abschnitt wieder allgemeine Flächen, $f : U \to \mathbb{R}^m$ mit $U \subset \mathbb{R}^n$, also nicht nur Hyperflächen. Wir wollen spezielle Kurven auf Flächen betrachten. Insbesondere wollen wir kürzeste Kurven zwischen zwei Punkten auf Flächen untersuchen.

Definition. Sei $f : U \to \mathbb{R}^m$ eine Fäche und $\gamma : [a, b] \to U$ eine Kurve. Dann nennen wir die auf der Fläche liegende Kurve $c = f \circ \gamma$ eine *Geodätische*, wenn $|c'| \equiv \text{const}$ ist (also ein Vielfaches der Bogenlänge) und der tangentiale Anteil von c'' verschwindet, also

$$(c'')^{\top} = 0 \quad \text{in } [a, b] \, .$$

Bemerkung. (i) Geodätische sind die natürliche Verallgemeinerung der Geraden aus dem $\mathbb{R}^n$. Man kann folgendes zeigen: Ist c die auf der Fläche liegende kürzeste, zwei gegebene Punkte

verbindende Kurve, so ist c eine Geodätische. Dazu muss man die erste Variation der Bogenlänge berechnen (siehe nächster Paragraph).
(ii) Die physikalische Interpretation lautet: Bewegt sich ein Teilchen auf einer Geodätischen, so gibt erfährt es keine tangentialen Beschleunigungen sondern nur eine Beschleunigungen in normale Richtung, also nur Beschleunigungen die sich aus der Krümmung der Fläche gegründen. In der Relativitätstheorie bewegen sich Lichtteilchen entlang von Geodätischen im Raum. Die Bahnen werden in der Nähe schwerer Körper (z.B. Sonne) gekrümmt. Diese Krümmung kommt dadurch zustande, dass der schwere Körper den Raum krümmt. Der uns umgebende Raum ist also kein euklidischer $\mathbb{R}^3$, sondern ein gekrümmter dreidimensionaler Raum. Dieser ist (zumindest mathematisch abstrakt) in einen $\mathbb{R}^m$ für hinreinreichend großes m eingebettet.

Beispiele. (i) Die konstante Kurve $c(t) \equiv P_0$ ist stets Geodätische. (ii) Betrachten wir den $\mathbb{R}^n$ als Teilmenge des $\mathbb{R}^{n+1}$ mit Parametrisierung $f(x) = (x, 0)$, so sind die Geodätischen gerade Teilmengen von Geraden. (iii) Auf der Sphäre $\mathbb{S}^n$ sind die Großkreise Geodätische. Dabei sind Großkreise der Durchschnitt von $\mathbb{S}^n$ mit einer den Koordinatenursprung enthaltenden n-dimensionalen Hyperebene.

Will man Geodätische gemäß ihrer Definition ermitteln, so muss man, um den tangentialen Anteil von c'' zu ermitteln, die Normale an die Fläche kennen. Es scheint also wieder so zu sein, als ob die Geodätischen keine Größen der inneren Geometrie sind.

Sie sind es aber doch, wie folgender Satz zeigt.

Satz 8. *(Differentialgleichung für Geodätische)*
Eine mit konstanter Geschwindigkeit parametrisierte Kurve $c = f \circ \gamma \colon [a, b] \to \mathbb{R}^m$ ist geodätisch genau dann, wenn für alle $t \in [a, b]$ gilt

$$\gamma''^k(t) + \sum_{i,j} \Gamma^k_{ij}\big(\gamma(t)\big)\gamma'^i(t)\gamma'^j(t) = 0 \qquad \text{für } k = 1, \ldots, n. \tag{10}$$

Insbesondere sind die Geodätischen Größen der inneren Geometrie.

Beweis. Zunächst ist

$$c' = \sum_{i=1}^n \partial_i f \gamma'^i \quad \text{und} \quad c'' = \sum_{i,j=1}^n \partial_{ij} f \gamma'^i \gamma' + \sum_{i=1}^n \partial_i f \gamma''^i \ .$$

Der tangentiale Anteil der zweiten Gleichung liefert

$$0 = c''^\top \quad \Leftrightarrow \quad 0 = \sum_k \Big(\gamma''^k + \sum_{i,j} \gamma'^i \gamma'^j (\Gamma^k_{ij} \circ \gamma)\Big)\partial_k f \ .$$

In dieser Linearkombination sind die n Vektoren $\partial_k f$ linear unabhängig in $T_p f \subset \mathbb{R}^m$. Ist also c Geodätische, so müssen alle Koeffizienten verschwinden und somit (10) gelten.
Gilt andererseits die Gleichung (10), so muss $c''^\top = 0$ sein. Da nun c' ein Tangentialvektor ist, folgt weiter $\langle c', c'' \rangle = \langle c', c''^\top \rangle = 0$. Damit muss aber $|c'|^2 \equiv \text{const}$ sein und damit ist c eine Geodätische. $\square$

Bemerkung. Die physikalische Interpretation dieses Satzes: Unsere Welt ist ein dreidimensionaler Raum. Um vernünftig damit rechnen zu können, stellen wir uns diese in einen $\mathbb{R}^m$ für hinreichend großes m eingebettet vor (es reicht z.B. $m = 7$). Nun sind die Bahnkurven von Lichtstrahlen, also die Geodätischen, Größen der inneren Geometrie. Sie hängen nur von der Metrik unseres Universums ab, nicht aber davon, welche konkrete Einbettung in den $\mathbb{R}^m$ wir gewählt haben (Diese Einbettung ist ja auch nur ein mathematisches Hilfsmittel.) Man spricht dann auch von einem *Riemannschen Raum* oder auch einer *Riemannschen Mannigfaltigkeit.*

Betrachten wir nun eine längentreu parametrisierte Fläche, also $g_{ij} = \delta_{ij}$ in jedem Punkt. Dann sind alle Christoffel-Symbole $\Gamma_{ij}^k = 0$ und wir erhalten

Korollar 9. *(Geodätische bei längentreuer Parametrisierung)*
Gegeben sei eine längentreue Parametrisierung $f : U \to \mathbb{R}^m$ einer Fläche. Dann sind die Geodätischen auf dieser Fläche die Bilder unter f von Geradenstücken.

Beweis. Die Differentialgleichung (10) reduziert sich auf $\gamma''(t) = 0$, also eine Gerade $\gamma(t) = at + b$ mit $a, b \in \mathbb{R}^n$. Mit $c = f \circ \gamma$ erhalten wir die Geodätischen. $\square$

Bemerkung. Man beachte jedoch, dass dieser Satz nur auf Flächen anwendbar ist, welche sich überhaupt längentreu parametrisieren lassen. Nach Satz 7 ist genau dann der Fall, wenn $K \equiv 0$ für die Gauss-Krümmung gilt.

Übungsaufgabe: Mit Hilfe einer längentreuen Parametrisierung ermittele man alle Geodätischen auf dem Zylinder und dem Kegel.

Wir können jetzt die lokale Existenz von Geodätischen zeigen.

Satz 10. *(Lokale Existenz Geodätischer)*
Es seien $p \in U$, $X \in \mathbb{R}^n$, $t_0 \in \mathbb{R}$ gegeben. Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$ und eine eindeutig bestimmte Geodätische $\gamma = \gamma_{p,X} : (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \to U$ mit $\gamma(t_0) = p$ und $\gamma'(t_0) = X$.

Beweis. Das System von Differentialgleichungen zweiter Ordnung (10) erfüllt eine lokale Lipschitzbedingung, denn die Christoffelsymbole sind glatt. Nach dem Satz von Picard-Lindelöf existiert daher genau eine Lösung $\gamma(t)$ zu Anfangswerten $\gamma(t_0) = p$ und $\gamma'(t_0) = X$, definiert in einer Umgebung von t_0. Dies bedeutet $(c'')^\top = 0$ für $c = f \circ \gamma$. Wie in Satz 8 zeigt man nun dass $|c'|$ konstant ist und somit c Geodätische ist. $\square$

Beispiel. Für $\mathbb{S}^n$ seien gegeben $P \in \mathbb{S}^n$ und $V \in T_p f$ mit $|V| = 1$. Wegen $P \perp V$ liegt der Großkreis $c(t) := \cos t\, P + \sin t\, V$ in $\mathbb{S}^n$, weiter erfüllt er die Anfangsbedingungen $c(0) = P$ und $c(0) = V$. Aus $c''(t) = -c(t) = -n \circ c(t)$ folgt, dass $c''^\top = 0$ ist, d.h. c ist Geodätische. Nach der Eindeutigkeitsaussage des Satzes gibt es keine weiteren Geodätischen auf $\mathbb{S}^n$.

Es stellt sich nun die Frage, ob die Geodätischen auch global existieren, d.h. ob man den Definitionsbereich einer Geodätischen vom Intervall $[t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$ auf ganz $\mathbb{R}$ ausdehnen kann? Dies kann man im Allgemeinen nur unter gewissen Voraussetzungen an die Fläche tun. Zum Beispiel lassen sich Geodätische nicht mehr fortsetzen, wenn sie an den “Rand” der Fläche stößt. Betrachtet man allerdings nur metrisch vollständige Flächen (diesen Begriff muss man geeignet definieren), so lassen sich die Geodätischen nach dem Satz von Hopf-Rinow tatsächlich auf ganz $\mathbb{R}$ fortsetzen (siehe [J]). Wir zeigen hier folgenden Spezialfall dieses Satzes.

Satz 11. *(Globale Existenz Geodätischer)*
Es sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ eine auf ganz $\mathbb{R}^n$ definierte Parametrisierung einer Fläche. Ferner sei der kleinste Eigenwert der ersten Fundamentalform g_p durch eine Konstante $m > 0$ nach unten abgeschätzt, also

$$\langle g_p V, V\rangle \geq m|V|^2 \quad \textit{für alle } V \in \mathbb{R}^n\,,\ p \in \mathbb{R}^n\,.$$

Dann existiert zu $p \in \mathbb{R}^n$, $X \in \mathbb{R}^n$, $t_0 \in \mathbb{R}$ genau eine auf ganz $\mathbb{R}$ erklärte Geodätische $c = f \circ \gamma$ mit $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, $\gamma(t_0) = p$ und $\gamma'(t_0) = X$.

Beweis. Angenommen, der Satz wäre falsch. Dann existiert ein maximales $\varepsilon > 0$ sodass eine Geodätische $\gamma : (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \to \mathbb{R}^n$ nach Satz 10 existiert. Diese ist mit konstanter Geschwindigkeit $C \geq 0$ parametrisiert. Dann gilt die Abschätzung

$$C^2 = |c'(t)|^2 = \langle df_{\gamma(t)}\gamma'(t), df_{\gamma(t)}\gamma'(t)\rangle = \langle df^T df \gamma'(t), \gamma'(t)\rangle = \langle g_{\gamma(t)}\gamma'(t), \gamma'(t)\rangle \geq m|\gamma'(t)|^2$$

bez. nach Umstellen

$$|\gamma'(t)|^2 \leq \frac{C^2}{m} \quad \text{für } t \in (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)\,.$$

Mit dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung genügt dann γ der Lipschitz-Bedingung

$$|\gamma(t_1) - \gamma(t_2)| \leq L|t_1 - t_2| \quad \text{für } t_1, t_2 \in (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$$

mit einer Konstanten $L = L(C, m)$. Insbesondere lässt sich $\gamma(t)$ stetig auf $[t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$ fortsetzen. Mit Hilfe der Geodätischengleichung (10) schätzen wir nun die zweiten Ableitungen γ'' gegen eine Konstante ab. Damit genügen dann auch die ersten Ableitungen γ' einer Lipschitz-Bedingung und lassen sich stetig auf $[t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$ fortsetzen. Durch Differenzieren der Geodätischengleichung schätzen wir schließlich die dritten Ableitungen ab und können mit demselben Schluss die zweiten Ableitungen γ'' stetig auf $[t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$ fortsetzen. Durch erneutes Lösen der Differentialgleichung (10) können wir γ auf einen Definitionsbereich $(t_0 - \varepsilon - \varepsilon_1, t_0 + \varepsilon + \varepsilon_1)$ fortsetzen. Dies ist jedoch ein Widerspruch zur maximalen Wahl von ε. $\square$

Bemerkungen. (i) Eine Fläche, welche den Voraussetzungen des Satzes genügt, nennt man *geodätisch vollständig*. (ii) Die Voraussetzung an den kleinsten Eigenwert von g kann nicht weggelassen werden. Zum Beispiel liefert $f(x, y) = (\arctan x, \arctan y, 0)$ für $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ eine Parametrisierung eines Teiles der x, y-Ebene, nähmlich des Quadrates $(-\pi/2, \pi/2) \times (-\pi/2, \pi/2)$. Hier liefert $\gamma(t) = (\tan t, 0)$ für $t \in (-\pi/2, \pi/2)$ eine Geodätische, die sich aber nicht auf $[-\pi/2, \pi/2]$ fortsetzen lässt. Weiterhin gilt $\det g = \frac{1}{(1+x^2)(1+y^2)} \to 0$ für $x, y \to \infty$, d.h. hier ist die Abschätzung des kleinsten Eigenwertes nach unten nicht möglich.

`13. Vorlesung, Mittwoch 18.7.07`

2.2. **Erste Variation der Bogenlänge.** Wir wollen in diesem Abschnitt zeigen, dass kürzeste, zwei Punkte verbindende Kurven auf Flächen Geodätische sein müssen. Hierzu müssen wir die erste Variation der Bogenlänge einer Kurve berechnen.

Um die Länge einer gegebenen Kurve mit anderen Kurven zu vergleichen, führen wir ein:

Definition. Es sei $\gamma\colon [a,b] \to U$ eine Kurve in U. Eine *Variation* von γ ist eine (glatte) Abbildung

$$h\colon (-\varepsilon,\varepsilon)\times[a,b]\to U \quad , \quad h_s(t) := \gamma(t) + s\,\varphi(t)$$

wobei $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ eine glatte Funktion ist, die man das *Variationsfeld* nennt. Die Abbildung $h(s,t) = h_s(t)$ heißt *eigentliche Variation von* γ, wenn $\varphi(a) = 0 = \varphi(b)$ gilt.

Der Begriff der Variation erfaßt also nur benachbarte Vergleichskurven.

Lemma 12 (1. Variation)**.** *Sei h_s eine Variation der Kurve γ. Wenn zusätzlich $c = f\circ\gamma$ konstante Geschwindigkeit $k := |c'| = const > 0$ besitzt, so gilt*

$$\frac{d}{ds}L(f\circ h_s)\Big|_{s=0} = \frac{1}{k}\, g\Big(\varphi(t), \gamma'(t)\Big)\Big|_a^b - \frac{1}{k}\int_a^b \Big\langle df_{\gamma(t)}\varphi(t),\, c''(t)\Big\rangle\, dt. \tag{11}$$

Beweis. Die Länge von $f\circ h_s$ ist

$$L(f\circ h_s) = \int_a^b \sqrt{\Big\langle \frac{d}{dt}(f\circ h_s),\, \frac{d}{dt}(f\circ h_s)\Big\rangle}\, dt.$$

Durch Differenzieren unter dem Integral erhält man:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{ds}L(f\circ h_s)\Big|_{s=0} &= \int_a^b \frac{1}{2\sqrt{\langle\cdot,\cdot\rangle}\big|_{s=0}} 2\Big\langle \frac{d}{ds}\frac{d}{dt}(f\circ h_s),\, \frac{d}{dt}(f\circ h_s)\Big\rangle\Big|_{(s=0)} dt \\
&\overset{\text{Schwarzsches Lemma}}{=} \frac{1}{k}\int_a^b \Big\langle \frac{d}{dt}\frac{d}{ds}(f\circ h_s),\, \frac{d}{dt}(f\circ h_s)\Big\rangle\Big|_{(s=0)} dt \\
&= \frac{1}{k}\int_a^b \left[\frac{d}{dt}\Big\langle \underbrace{\frac{d}{ds}(f\circ h_s)}_{df\cdot\frac{\partial h}{\partial s}},\, \underbrace{\frac{d}{dt}(f\circ h_s)}_{df\cdot\gamma' \text{ für } s=0}\Big\rangle - \Big\langle \frac{d}{ds}(f\circ h_s),\, \frac{d^2}{dt^2}(f\circ h_s)\Big\rangle\right]_{(s=0)} dt \\
&= \frac{1}{k} g\Big(\varphi,\gamma'\Big)\Big|_a^b - \frac{1}{k}\int_a^b \Big\langle df(\varphi), c''\Big\rangle\, dt
\end{aligned}$$

□

Bemerkung. Falls die Variation eigentlich ist, also $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$, so verschwindet der erste Summand und es folgt

$$\frac{d}{ds}L(f\circ h_s)\Big|_{s=0} = -\frac{1}{k}\int_a^b \Big\langle df_{\gamma(t)}\varphi(t), c''(t)\Big\rangle dt\ .$$

Haben wir nun eine kürzeste Kurve $c(t)$ die Punkte $c(a) = p_0$ und $c(b) = p_1$ verbindende Kurve, so müssen alle weiteren, p_0 und p_1 verbindenen Kurven mindestens genauso lang sein. Für jede eigentliche Variation besitzt also die Zuordnung $s \mapsto L(f\circ h_s)$ in $s = 0$ ein Minimum und somit muss $\frac{d}{ds}L(f\circ h_s)|_{s=0}=0$ gelten. Wir erhalten damit die Euler-Gleichung der ersten Variation der Bogenlänge

$$0=\int_a^b \Big\langle df_{\gamma(t)}\varphi(t),c''(t)\Big\rangle=\int_a^b \Big\langle \varphi(t),(df_{\gamma(t)})^T c''(t)\Big\rangle dt\,.$$

Dies muss für alle glatten Funktionen $\varphi:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ mit $\varphi(a)=\varphi(b)=0$ gelten, insbesondere auch für $\varphi(t)=r(t)(df_{\gamma(t)})^T c''(t)$, wobei $r:[a,b]\to\mathbb{R}$ eine beliebige, glatte Funktion ist mit $r(a)=r(b)=0$ sowie $r(t)>0$ in (a,b). Es folgt dann

$$0=\int_a^b r(t)\Big|(df_{\gamma(t)})^T c''(t)\Big|^2 dt$$

und daraus $(df)^T c''(t)=0$ für jedes $t\in[a,b]$ (wieso?). Damit erhalten wir

Satz 13. *(Kürzeste sind Geodätische)*
Es sei $f:U\to\mathbb{R}^m$ eine Fläche und $c=f\circ\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^m$ eine Kurve auf der Fläche, sodass $|c'|$ konstant ist. Wenn es keine kürzere, die Punkte $c(a)$ und $c(b)$ verbindende Kurve gibt, so ist c eine Geodätische.

Beweis. Wir müssen $(c'')^\top=0$ in $[a,b]$ zeigen. Wir wissen bereits, dass $df^Tc''=0$ in $[a,b]$ gilt. Für einen beliebigen Vektor $V\in\mathbb{R}^n$ ist dann aber $0=\langle V,df^Tc''\rangle=\langle df(V),c''\rangle$ woraus dann $(c'')^\top=0$ folgt. □

Bemerkung. Die Rückrichtung dieses Satzes gilt nicht! Wenn man eine Geodätische auf einer Fläche gefunden hat, so muss diese nicht die Kürzeste sein.

Beispiel. Betrachte die Sphäre $\mathbb{S}^2\subset\mathbb{R}^3$ und die beiden Punkte $P_1=(1,0,0)\in\mathbb{S}^2$ sowie $P_2=(0,1,0)\in\mathbb{S}^2$. Hier gibt es zwei, P_1 und P_2 verbindende Geodätische, nämlich $c_1(t)=(\cos t,\sin t,0)$ für $t\in[0,\pi/2]$ sowie $c_2(t)=(\cos t,\sin t,0)$ für $t\in[\pi/2,2\pi]$ mit den unterschiedlichen Längen $L(c_1)=\pi/2$ und $L(c_2)=3/2\pi$.

Man fragt sich natürlich, ob man auf einer Fläche stets zu je zwei Punkten eine kürzeste, die Punkte verbindende Kurve existiert. Im Allgemeinen kann man dies nicht erwarten, wie folgendes Beispiel zeigt.

Beispiel. Betrachte die Parametrisierung $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$, $f(x,y):=(e^x\cos y,e^x\sin y,0)$, welche die punktierte Ebene $\mathbb{R}^2\backslash\{0\}\subset\mathbb{R}^3$ parametrisiert. Hier existiert keine Kürzeste und auch keine Geodätische zwischen den Punkten $(1,0,0)$ und $(-1,0,0)$, da in der Ebene nur Geraden Geodätische sind.

Das Problem bei diesem Beispiel ist, dass die Fläche einen "Randpunkt" besitzt. Man muss also stattdessen Flächen "ohne Rand" betrachten, was den metrisch vollständigen Flächen entspricht. Dann liefert der bereits zitierte Satz von Hopf-Rinow die Existenz zwei Punkte verbindender Geodätischer. Wir zitieren nur folgenden Spezialfall.

Satz 14. *(Existenz kürzester Kurven)*
Es sei $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ eine auf ganz $\mathbb{R}^n$ definierte Parametrisierung einer Fläche. Ferner sei

der kleinste Eigenwert der ersten Fundamentalform g_p durch eine Konstante $m > 0$ nach unten abgeschätzt, also

$$\langle g_p V, V\rangle \geq m|V|^2 \quad \text{für alle } V \in \mathbb{R}^n\,,\; p \in \mathbb{R}^n\,.$$

Dann existiert zwischen je zwei Punkten $f(p_1)$ und $f(p_2)$ auf der Fläche eine glatte Kurve kürzester Länge, insbesondere also eine Geodätische.

Bemerkung. Die Kürzeste dieses Satzes muss nicht eindeutig sein.

Es stellt sich natürlich die Frage, für welche Flächen sich der kleinste Eigenwert von g nach unten abschätzen lässt. Hier ein

Beispiel. Betrachte einen Graphen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+1}$, $f(x) := (x, u(x))$ mit einer glatten Funktion $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Die erste Fundamentalform lautet hier $g_{ij} = \delta_{ij} + \partial_i u \partial_j u$. Diese Matrix besitzt den Eigenwert 1 mit Vielfachheit $n-1$ sowie den Eigenwert $1+|\nabla u|^2$ mit Vielfachheit 1 (Überprüfen!). Also ist hier der kleinste Eigenwert durch 1 nach unten abgeschätzt und obiger Satz anwendbar.

Ausblick: Weitere interessante Fragen im Zusammenhang mit Geodätischen, die wir leider nicht mehr behandeln können, sind folgende:
1.) geschlossenene Geodätische: Unter welchen Voraussetzungen an die Fläche existieren geschlossene Geodätische und wann nicht? Dabei heißt eine Geodätische $c = f \circ \gamma$ geschlossen, wenn sie periodisch ist, also $c(t+T) = c(t)$ für ein $T > 0$. z.B. In der Ebene gibt es keine, auf dem Zylinder gibt es welche und auf der Sphäre sind es alle.

2.) Wann können sich Geodätsche selbst schneiden, d.h. wann gibt es nichkonstante Geodätische $c = f \circ \gamma$ mit $c(a) = c(b)$ für $a \neq b$?

3.) Wann ist eine gegebene Geodätische zwischen zwei Punkten die Kürzeste oder zumindest lokal die Kürzeste? Hier benötigt man eine Formel für die zweite Variation der Bogenlänge. z.B. In der Ebene ist jede Geodätische auch Kürzeste, auf der Sphäre existieren Geodätische, die nicht Kürzeste sind.

3. ÜBUNGSAUFGABEN

3.1. Geodätische.

Aufgabe 1 – Existenz von Flächen bei vorgegebenen Geodätischen:

Finden Sie Flächen $f\colon U \to \mathbb{R}^3$ mit den folgenden Eigenschaften:

a) $U := \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ und alle Ursprungskreise sind Geodätische.
b) Wie in a), jedoch soll kein Strahl durch 0 Geodätische sein.

Aufgabe 2 – Geodätische auf abwickelbaren Flächen:

a) Geben Sie je eine längentreue Parametrisierung des Zylinder $Z = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 = 1\}$ sowie des Kegels $K = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 = z^2\}$ an.
b) Ermitteln Sie nun alle Geodätischen auf Zylinder und Kegel.

Aufgabe 3 – Längentreue Parametrisierung:

Die Parametrisierung $f \in C^2(U, \mathbb{R}^3)$ einer Fläche nennt man längentreu, falls sie Längen von Kurven erhält, d.h. für jede Kurve $\gamma : [a,b] \to U$ mit $c := f \circ \gamma$ gilt $L(\gamma) = L(c)$ für die Längen dieser Kurven.

a) Geben Sie eine längentreue Parametrisierung des Zylinders an.
b) Zeigen Sie: Eine Parametrisierung ist genau dann längentreu, falls $g_{ij} = \delta_{ij}$ gilt, also die erste Fundamentalform mit der Einheitsmatrix übereinstimmt.
c) Zeigen Sie nun, dass das Bild einer Geraden unter einer längentreuen Abbildung eine Geodätische ist.

Aufgabe 4 – Flächentreue Parametrisierung:

Eine Parametrisierung $f \in C^2(U, \mathbb{R}^3)$ nennt man flächentreu, falls für die erste Fundamentalform $\det(g_{ij}) = 1$ gilt. Wir wollen zeigen, dass sich durch geeignete Umparametrisierung jede Fläche lokal flächentreu parametrisieren lässt.

a) Betrachten Sie zu $f \in C^2(U, \mathbb{R}^3)$ die umparametrisierte Fläche
$$\tilde{f}(u,v) := f(\varphi(u,v), v)$$
mit einer gewissen Funktion $\varphi(u,v) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Berechnen Sie die erste Fundamentalform $\tilde{g}_{ij}$ von $\tilde{f}$ sowie $\det(\tilde{g}_{ij})$.
b) Leiten Sie aus der Bedingung $\det(\tilde{g}_{ij}) = 1$ eine gewöhnliche Differentialgleichung für $\varphi = \varphi(u)$ her, in der v als Parameter eingeht. Zeigen Sie, dass diese bei geeignet gestellten Anfangswerten lösbar ist.

Aufgabe 5 – Fläche in Gaußscher Form:

Gegeben sei ein Flächenstück $f \in C^2(U, \mathbb{R}^3)$ parametrisiert in Gaußscher Form, d.h. es gilt $g_{11} = 1$ sowie $g_{12} = 0$ für die erste Fundamentalform.

a) Zeigen Sie, dass die Kurven $c(s) := f(s,t)$ für festes t Geodätische sind.

b) Zu nach Bogenlänge parametrisierter Kurve $(r,h)(t)$ betrachten wir die Rotationsfläche

$$f(t,\varphi) := (r(t)\cos\varphi, r(t)\sin\varphi, h(t)) \ .$$

Zeigen Sie, dass f eine Parametrisierung in Gaußscher Form ist und folgern Sie, dass die Meridiankurve $c(t) := f(t,\varphi)$ für festes φ eine Geodätische ist.

Aufgabe 6 – Christoffelsymbole einer Fläche in Gaußscher Form:

a) Gegeben sei ein Flächenstück $f \in C^2(U, \mathbb{R}^3)$ parametrisiert in Gaußscher Form, d.h. $g_{11} = 1$ sowie $g_{12} = 0$. Berechnen Sie alle acht Christoffelsymbole in Abhängigkeit von $G(p) := g_{22}(p)$.

b) Wenden Sie a) speziell auf eine Rotationsfläche $f(t,\varphi) = (r(t)\cos\varphi, r(t)\sin\varphi, h(t))$ mit nach Bogenlänge parametrisierter Meridiankurve $(r,h)(t)$ an. Es sei $\gamma(s) = (t(s), \varphi(s))$ eine Kurve, so dass $c := f \circ \gamma$ eine Geodätische ist. Leiten Sie die Differentialgleichungen

$$0 = t''(s) - r(t(s))r'(t(s))(\varphi'(s))^2 \quad , \quad 0 = \varphi''(s) + 2\frac{r'(t(s))}{r(t(s))}t'(s)\varphi'(s)$$

her.

c) Wann sind die Meridiankurven $c(t) := f(t,\varphi)$ und Breitenkreise $c(\varphi) := f(t,\varphi)$ Geodätische?

Aufgabe 7 – Geodätische auf Rotationsflächen:

Wir betrachten die Rotationsfläche $f(t,\varphi) := (r(t)\cos\varphi, r(t)\sin\varphi, h(t))$ zu nach Bogenlänge parametrisierter Kurve $(r,h)(t)$. Es sei $\gamma(s) = (t(s), \varphi(s))$ eine reguläre Kurve und $c := f \circ \gamma$. Weiter sei $\vartheta(s)$ der Winkel zwischen der Kurve $c(s)$ und dem Breitenkreis durch $c(s)$, d.h.

$$\cos\vartheta(s) = \frac{\langle c'(s), \partial_2 f(\gamma(s))\rangle}{|c'(s)||\partial_2 f(\gamma(s))|} \ .$$

a) Zeigen Sie die Hilfsaussage

$$\cos\vartheta(s) = \frac{r(t(s))\varphi'(s)}{|c'(s)|} \ .$$

b) Zeigen Sie: Ist γ geodätisch in f (also insbesondere $|c'|$ konstant), so ist der Ausdruck

$$r(t(s))\cos\vartheta(s)$$

konstant als Funkion von s. Dies wird der *Satz von Clairaut* genannt.
Hinweis: Benutzen Sie a) sowie die beiden Differentialgleichungen für Geodätische aus Teil b) der letzten Aufgabe.

c) Wir setzen nun voraus, dass $|c'|$ konstant ist sowie $t(s) \neq 0$. Zeigen Sie: Ist der Ausdruck $r(t(s)) \cos \vartheta(s)$ konstant in s, so ist γ eine Geodätische in f.
Hinweis: Zeigen Sie, dass beide Differentialgleichungen von Teil b) der letzten Aufgabe erfüllt sind.

Aufgabe 8 – Sinussatz der sphärischen Geometrie:

Auf der Späre $\mathbb{S}^2$ betrachten wir ein Dreieck, d.h. drei Punkte jeweils verbunden durch Geodätische. Die Seitenlängen bezeichnen wir mit $a, b, c < \pi$ und die den entsprechenden Seiten gegenüberliegenden Winkel mit $\alpha, \beta, \gamma \in [0, 2\pi]$. Zeigen Sie

$$\frac{\sin\alpha}{\sin a} = \frac{\sin\beta}{\sin b} = \frac{\sin\gamma}{\sin c}\,.$$

Tipp: Legen Sie eine Ecke des Dreiecks auf die Drehachse der Kugel und wenden Sie den Satz von Clairaut aus der letzten Aufgabe auf die gegenüberliegende Seite an.

Aufgabe 9 – Asymptotik von Geodätischen auf Rotationsflächen:

Zu einer regulären Meridiankurve $(r, h)\colon [a, b] \to \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ betrachten wir die Rotationsfläche $f(t, \varphi) = \big(r(t)\cos\varphi, r(t)\sin\varphi, h(t)\big)$. Dabei sei $r(a) = R$, $r(b) = \rho$ und $r(t) > \rho > 0$ für $t \in [a, b)$. Es parametrisiere $\eta\colon \varphi \mapsto (b, \varphi)$ den Breitenkreis $e = f \circ \eta$ vom Radius ρ auf der Fläche.

Wir betrachten eine nach Bogenlänge parametrisierte Geodätische $\gamma(s) = \big(t(s), \varphi(s)\big)$ in der Rotationsfläche, deren Definitionsbereich $[0, S]$ maximal gewählt sei. Für γ soll gelten: $r\big(t(0)\big)\cos\vartheta(0) = \rho$ sowie $t(0) = a$ (der Startradius ist also R).

Benutzen Sie den Satz von Clairaut (Aufgabe 7), um die folgenden Aufgabenteile zu behandeln.

a) Können sich die Geodätische $c = f \circ \gamma$ und der Breitenkreis $e = f \circ \eta$ schneiden? Versuchen Sie diese Situation zu verstehen (keine Rechnung nötig).
b) Zeigen Sie, dass in jedem Fall c dem Breitenkreis e beliebig nahe kommt.
c) Falls e geodätisch ist, schneiden sich c und e nicht, so daß c asymptotisch zum geodätischen Breitenkreis e wird.

Aufgabe 10 – Geodätische auf dem Rotationstorus:

a) Benutzen Sie die letzte Aufgabe, um die Geodätischen auf dem Rotationstorus mit $r(t) = B + b\cos t$, $h(t) = b\sin t$ für $B > b > 0$ zu diskutieren. Bestimmen Sie drei qualitativ verschiedene Fälle, je nach Vorzeichen von $(B - b) - \rho$, und finden Sie sie auf dem abgebildeten Torus.
b) Geben Sie eine Rotationsfläche an, für die eine Geodätische $c(s)$ asymptotisch zu zwei verschiedenen Breitenkreisen wird (für $s \to \pm\infty$).

Aufgabe 11 – Rotationsparaboloid:

Wir betrachten das Rotationsparaboloid

$$f\colon U := \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, \qquad (t,\varphi) \mapsto \big(r(t)\cos\varphi,\, r(t)\sin\varphi,\, h(t)\big) \in \mathbb{R}^3$$

mit $r(t) := t$, $h(t) := t^2$ für $t > 0$. Sei $\gamma(s) = \big(t(s), \varphi(s)\big)$ eine auf $\mathbb{R}$ definierte Geodätische mit $\|\gamma'(t)\| \equiv 1$. Wir nehmen an, dass γ kein Meridian ist, so dass nach dem Satz von Clairaut (Aufgabe 7) die Konstante

$$\rho :\equiv r\big(t(s)\big)\cos\vartheta(s) = r\big(t(s)\big)^2\varphi'(s) \overset{\text{hier}}{=} t^2(s)\varphi'(s)$$

von 0 verschieden ist. Nach eventueller Änderung der Durchlaufrichtung von γ können wir $\rho > 0$ annehmen.

a) Zeigen Sie, dass $c = f \circ \gamma$ den Breitenkreis $r = \rho$ zu genau einem Zeitpunkt s_0 berührt; außerdem gilt $t'(s) < 0$ für $s < s_0$ und $t'(s) > 0$ für $s > s_0$.
b) Beweisen Sie $\varphi(s) \to \infty$ für $s \to \infty$ und $\varphi(s) \to -\infty$ für $s \to -\infty$.
   Tipp: Zeigen Sie $\int_0^\infty \varphi'(s)\,ds = \rho\int_0^\infty \frac{1}{h(t(s))}\,ds$ und $h\big(t(s)\big) \le h\big(t(0)\big) + |s|$.
c) Folgern Sie aus a) und b), daß c sich unendlich oft selbst schneidet. Insbesondere findet man auf jeder Geodätischen, die nicht Meridian ist, Teilstücke, die bezüglich ihrer Endpunkte nicht die kürzeste Kurve darstellen.

Aufgabe 12 – Vollständigkeit von Geodätischen:

Sei $f = f(x_1, x_2) \in C^3(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$ ein Flächenstück mit gleichmäßig beschränkten Ableitungen bis dritter Ordnung, d.h.

$$|\frac{\partial}{\partial x_i} f(p)| + |\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} f(p)| + |\frac{\partial^3}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} f(p)| \le M \quad \text{für } i,j,k = 1,2$$

mit einer Konstanten $M \in \mathbb{R}$. Ferner gebe es ein $\varepsilon > 0$, so dass $\det g_{ij}(p) > \varepsilon$ für $p \in \mathbb{R}^2$ gilt.

a) Zeigen Sie: Alle Geodätischen existieren global, d.h. der Definitionsbereich jeder Geodätischen lässt sich auf $\mathbb{R}$ ausdehnen.
b) Bleibt die Aussage aus a) auch richtig, wenn man eine der beiden Voraussetzungen weglässt?

Aufgabe 13 – $\mathsf{O}(n)$ ist Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^{n^2}$:

a) Wir bezeichnen den Vektorraum der $n \times n$-Matrizen mit $\mathsf{M}(n) \subset \mathbb{R}^{n^2}$. Zeigen Sie: Sind $A, B \in \mathsf{M}(n)$, so kann man das von $\mathbb{R}^{n^2}$ gegebene Standardskalarprodukt schreiben als $\langle A, B\rangle = \mathrm{Spur}(AB^t)$.
b) Wir bezeichnen den Vektorraum der schiefsymmetrischen $n \times n$-Matrizen mit $\mathsf{o}(n)$, und den der symmetrischen mit $\mathsf{Sym}(n)$. Zeigen Sie, dass man bezüglich $\langle\cdot,\cdot\rangle$ die orthogonale Zerlegung $\mathsf{M}(n) = \mathsf{Sym}(n) \oplus \mathsf{o}(n)$ hat. Welche Dimensionen haben die Summanden?
c) Wir definieren nun eine Abbildung

$$\varphi\colon \mathsf{M}(n) = \mathbb{R}^{n^2} \to \mathsf{Sym}(n) = \mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}}, \qquad \varphi(A) := A^t A.$$

   Zeigen Sie: $\mathrm{Kern}(d\varphi_{1_n}) = \mathsf{o}(n)$ und $\mathrm{Bild}(d\varphi_{1_n}) = \mathsf{Sym}(n)$. (Leiten Sie $s \mapsto \varphi(1 + sA)$ ab!)

d) Wir wollen zeigen, dass die Gruppe $\mathsf{O}(n) := \{P \in \mathsf{M}(n) \mid \varphi(P) = 1_n\}$ eine Untermannigfaltigkeit von $\mathsf{M}(n) = \mathbb{R}^{n^2}$ ist. Dazu müssen wir beweisen, dass $\operatorname{Rang} d\varphi$ in *jedem* Punkt den Wert $\frac{n(n+1)}{2}$ hat. (*Tipp*: Berechnen Sie $d\varphi_P(A)$ mittels der Kurve $c(s) := P + sA$ für $A \in \mathsf{M}(n)$ und $P \in \mathsf{O}(n)$; zeigen Sie $\operatorname{Kern}(d\varphi_P) = \{P^{-1}A \in \mathsf{o}(n)\} = P\mathsf{o}(n)$).
Bemerkung: Eine (Unter-)Mannigfaltigkeit, die zugleich Gruppe ist (oder umgekehrt!), nennt man eine *Lie-Gruppe.*

e) Es sei $P \in \mathsf{O}(n)$. Was sind Tangentialraum $T_P\mathsf{O}(n)$ und Normalraum $N_P\mathsf{O}(n)$?

f) Zusatz: $\mathsf{O}(n)$ ist beschränkt und abgeschlossen in $\mathbb{R}^{n^2}$, also eine kompakte Untermannigfaltigkeit von $\mathsf{M}(n)$. Weiterhin hat $\mathsf{O}(n)$ (wenigstens) zwei Zusammenhangskomponenten.

Aufgabe 14 – Geodätische der Lie-Gruppe $\mathsf{SO}(n)$*:*

Für eine Matrix $A \in \mathsf{M}(n)$ definieren wir

$$\exp A := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k,$$

wobei $A^0 := 1_n$.

a) Sofern Sie es nicht schon kennen, zeigen Sie: Die Reihe $\exp A$ konvergiert für jedes $A \in \mathsf{M}(n)$, so dass $\exp\colon \mathsf{M}(n) \to \mathsf{M}(n)$ (nehmen Sie dazu am besten $|a_{ij}| < \frac{C}{n}$ an).

b) Wir definieren durch $c(t) := \exp(tA) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(tA)^k$ eine Kurve $c\colon \mathbb{R} \to \mathsf{M}(n) = \mathbb{R}^{n^2}$. und wollen die Identität $c(s+t) = c(s)c(t)$ beweisen. Dazu kann man nachweisen, dass beide Seiten dieselbe Differentialgleichung erfüllen und denselben Anfangswert haben. Wir fixieren s und setzen $f_s(t) := c(s)c(t)$ und $g_s(t) := c(s+t)$. Zeigen Sie zuerst, dass dieselbe Anfangsbedingung $f_s(0) = g_s(0)$ gilt. Berechnen Sie dann c' und benutzen Sie dies, um f_s und g_s nach t abzuleiten. Bestätigen Sie, dass beide Funktionen die gleiche Differentialgleichung erfüllen. Wieso folgt daraus die behauptete Identität? (Sie können die Identität auch anders zeigen – denken Sie daran, wie Sie im Grundstudium die Funktionalgleichung der e-Funktion bewiesen haben.)

c) Wir betrachten von nun an die Exponentialabbildung für $A \in \mathsf{o}(n)$. Zeigen Sie zuerst $(\exp A)^{-1} = (\exp A)^t$, also $\exp A \in \mathsf{O}(n)$. Mit Hilfe der Abbildung $s \mapsto \exp(sA)$ zeigen Sie dann sogar $\exp A \in \mathsf{SO}(n)$.

d) Benutzen Sie die Gleichung für c' aus b), um zu zeigen, dass $c(s) = \exp(sA)$ für $A \in \mathsf{o}(n)$ konstante Geschwindigkeit $|c'|$ in $\mathbb{R}^{n^2}$ hat. (*Tipp*: Schreiben Sie das Standardskalarprodukt auf $\mathbb{R}^{n^2}$ wie in der letzten Aufgabe als $\langle A, B\rangle = \operatorname{Spur}(AB^t)$).

e) Als krönenden Abschluss zeigen Sie nun, dass $c(s) := \exp(sA)$ für $A \in \mathsf{o}(n)$ eine Geodätische der Untermannigfaltigkeit $\mathsf{SO}(n)$ darstellt. (*Tipp*: Berechnen Sie dazu c'' und benutzen Sie die Beschreibung des Tangential- und Normalraums der Untermannigfaltigkeit $\mathsf{O}(n)$ aus der letzten Aufgabe.)

3.2. **Integrabilitätsbedingungen und theorema egregium.**

Aufgabe 15 – Gaußkrümmung einer Fläche in Gaußscher Form:

Gegeben sei eine Fläche $f \in C^3(U, \mathbb{R}^3)$ parametrisiert in Gaußscher Form, also $g_{11} = 1$, $g_{12} = 0$ sowie $G^2(p) := g_{22}(p)$ mit $G > 0$. Zeigen Sie für die Gaußkrümmung die Formel

$$K(u, v) = -\frac{G_{uu}}{G} .$$

Welche Formel erhält man speziell für Rotationsflächen mit nach Bogenlänge parametrisierter Meridiankurve?

Aufgabe 16 – Mögliche Fundamentalformen:

Es sei die erste Fundamentalform gleich der Einheitsmatrix, $g_{ij} = \delta_{ij}$, und für die zweite Fundamentalform gelte $b_{11} = b_{12} = b_{21} = 0$ sowie $b_{22}(x, y) = b(x, y)$.

a) Wann sind sowohl Gauß- also auch Codazzigleichung erfüllt? Nach dem Hauptsatz der Flächentheorie lässt sich dann eine Fläche finden, deren erste und zweite Fundamentalform mit der gegebenen übereinstimmen.
b) Was ist die Gaußkrümmung dieser Fläche?

Aufgabe 17 – Unmögliche Fundamentalformen:

Es sei die erste Fundamentalform gleich der Einheitsmatrix, $g_{ij} = \delta_{ij}$. Wir betrachten zwei verschiedene zweite Fundamentalformen, beide mit $b_{12} = b_{21} = 0$ und mit (i) $b_{11} = 1$, $b_{22} = -1$ bzw. (ii) mit $b_{11}(x, y) = b_{22}(x, y) = (1 + x^2 + y^2)$. Zeigen Sie, dass es keine Flächen $f : U \to \mathbb{R}^3$ mit den beiden Fundamentalformen geben kann:

a) Was müßte die Gauß-Krümmung sein?
b) Sind Gauß- und Codazzi-Gleichung erfüllt?

Aufgabe 18 – Die hyperpolische Halbebene:

Auf $H := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$ definiert man eine erste Fundamentalform (oder Metrik) g durch $g_{11}(x, y) = g_{22}(x, y) = \frac{1}{y^2}$ sowie $g_{12} = g_{21} = 0$.

a) Berechnen Sie die Christoffelsymbole mit Hilfe der Formel aus der Vorlesung und lösen Sie danach die Differentialgleichung der Geodätischen.
   Hinweis: Die Geodätischen in H ergeben sich als der Durchschnitt von H mit Geraden parallel zur y-Achse sowie Kreisen mit dem Mittelpunkt auf der x-Achse.
b) Berechnen Sie die Gaußkrümmung der Halbebene.
c) Zwei Geodätische nennt man parallel, falls ihr Durchschnitt leer ist.
   Zeigen Sie: Zu jeder Geodätischen γ und jedem nicht auf γ liegenden Punkt p gibt es unendlich viele zu γ parallele Geodätische durch p.

Bemerkung: Die hyperbolische Halbebene bildet eine Geometrie, in welcher das Parallelenaxiom verletzt ist. Eine Immersion $f : H \to \mathbb{R}^3$ mit der angegebenen ersten Fundamentalform läßt sich zwar nicht finden (Satz von Hilbert), für geeignete Teilmengen von H gelingt es aber: Die Rotationsfläche der Traktix ist ein solches Beispiel.